KG2 zkouška, okruhy

Podoba zkoušky

Prezenční zkouška bude probíhat následovně. Níže najdete přibližně okruhy a vždy jsou zvýrazněny definice; zbytek jsou nějaká tvrzení nebo příklady, které vyžadují zdůvodnění. Zadání první fáze zkoušky sestává z témat níže.

Potom, co dostanete zadání zkoušky, je vaším úkolem **pouze zformulovat** zadané definice/tvrzení. V první fázi od vás nechci, abyste tvrzení dokazovali. Až budete mít sepsané formulace, přivoláte mě, pokud budete mít vše správně, zeptám se, jak byste dokazovali jedno tvrzení **nebo** dokázali nějaký příklad ze cvičení – přibližně strategie/struktura důkazu. Pokud i to bude správně, máte za 1 a jdete domů. Pokud ne, nechám vás důkaz sepsat pořádně. Pokud nastanou problémy už ve formulacích, budu se dále doptávat a podle množství vašich chybějících znalostí a nutných nápověd se bude zhoršovat vaše známka.

Distanční zkouška bude probíhat jinak. Je to z toho důvodu, že ve výše popsaném formátu zkoušky je příliš jednoduché podvádět. Proto na distanční zkoušce budu za všech okolností chtít důkaz nějakého netriviálního tvrzení. Může to být jedno z tvrzení ze seznamu níže, ale může to být i nějaké jednoduché cvičení, které se znalostí definic a vět z přednášky jde relativně snadno dokázat, ale nejde (jednoduše) si jeho řešení předpřipravit.

Okruhy

- Edmondsův algoritmus pro největší párování
  - **definice**: kontrakce hrany, párování, volná střídavá cesta (VSC), květ, kytka,
  - Lemma: G obsahuje VSC vzhledem k $M \Leftrightarrow M$ není největší párování v G
  - Lemma: C je květ kytky v M. Pak M má VSC v $G \Leftrightarrow M.C$ má VSC v $G.C$
  - Jak funguje Edmondsův algoritmus?
- Perfektní párování
  - **definice**: Tutteova podmínka
  - Tutteova věta o perfektním párování: G má PP právě když platí Tutteova podmínka
  - Petersenova věta (2-souvislý 3-regulární graf má PP)
- 3-souvislé grafy
  - **definice**: kontrakce hrany, k-souvislý graf
  - Lemma o kontrahovatelné hraně (LoKH)
  - Tutteova charakterizace 3-souvislých grafů (3-souvislé jsou právě grafy vyrobitelné "rozkontrahováním" hrany tak, aby její koncové vrcholy měly vždy stupeň ≥ 3.)

- Minory
  - **definice**: minor
  - Kuratowského-Wagnerova věta *(dlouhý důkaz – rozdělení na případy podle vrcholové souvislosti, nejtěžší případ jsou 3-souvislé grafy, použije se LoKH)*
- Grafy na plochách
  - **definice**: homeomorfismus, plocha (kompaktní souvislá 2-rozměrná varieta bez hranice), přidání ucha, přidání křižítka, pohled přes polygon se ztotožněnými hranami (jak vypadá např. Moebiův proužek, válec?), Σ_p, Π_p, degenerovanost
  - Zobecněná Eulerova formule (indukce podle rodu, nahrazení křižítka / ucha)
  - důsledek: lineární odhad na počet hran, konstantní průměrný stupeň, Heawoodova formule (degenerovanost)
- Barevnost
  - **definice**: vrcholové / hranové obarvení, vrcholová barevnost, hranová barevnost, d-degenerovanost, perfektní graf, chordální graf, perfektní eliminační schéma (PES)
  - Brooksova věta (barevnost grafu je nanejvýš Δ pokud to není úplný graf nebo lichý cyklus, pak $\Delta + 1$)
  - Hadwigerova domněnka (jen vyslovit)
  - Vizingova věta (hranová barevnost je buď max. stupeň nebo o jedna větší)
  - Slabá věta o perfektních grafech
  - Věta o chordálních grafech: graf je chordální právě když má PES
- Bondy-Chvátalova věta
- Tutteův polynom
  - **definice**: hodnost, nulita množiny hran, Tutteův polynom, chromatický polynom
  - $T_G(1,1) =$ počet koster
  - rekurentní vztahy pro mazání a kontrakce
  - vztah Tutteova a chromatického polynomu (stačí idea)
- Formální mocninné řady a vytvořující funkce
  - **definice**: formální mocninná řada, $[x^n]A(x)$, obyčejná vytvořující funkce množiny, exponenciální vytvořující funkce množiny,
  - základní operace na FMŘ (součet, součin); převrácená hodnota FMŘ a kdy existuje
  - složení dvou FMŘ a kdy existuje (pokud $A(x)$ je polynom nebo pokud $b_0 = 0$
  - příklad obyčejné vytvořující funkce pro jídla atd.
  - exponenciální vytvořující funkce, význam součinu, exponenciace, příklad s funkcemi $S(x)$ a $L(x)$ p stromy a lesy
- Burnsideovo lemma, akce grupy, aplikace

  - **definice**: akce grupy, množina pevných bodů, stabilizátor, ekvivalence prvků, orbita
  - příklad s koláčky a rozinkovými koláčky
  - Burnsideovo lemma

- Extremální teorie grafů a hypergrafů
  - Turánova věta
  - grafy se zakázaným úplným minorem mají lineárně hran
  - Erdos-Ko-Radova věta