

- (2,5 bodu) Necht'  $d_n$  je počet různých posloupností  $m_1, m_2, \dots, m_t$  přirozených čísel, kde  $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_t$  a  $m_1 + \dots + m_t = n$ . Například 6 lze vyjádřit jako 6, 1 + 5, 2 + 4 a 1 + 2 + 3, a proto  $d_6 = 4$ . Ukažte, že  $d_n = [x^n](1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots$  (nekonečný součin, ale rozmyslete si, že k určení koeficientu u  $x^n$  stačí vyhodnotit konečně mnoho členů).
- (2,5 bodu) Necht'  $l_n$  je počet různých posloupností  $c_1, \dots, c_t$  přirozených čísel, kde  $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_t$  a čísla  $c_1, \dots, c_t$  jsou lichá. Například 6 lze vyjádřit jako 1 + 5, 3 + 3, 1 + 1 + 1 + 3 a 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, a proto  $l_6 = 4$ . Ukažte, že  $l_n = [x^n] \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \dots$
- (2,5 bodu) Ukažte, že pro každé  $n$  platí  $d_n = l_n$ .
- (2,5 bodu) Necht'  $m_n$  je počet perfektních párování úplného grafu na  $n$  vrcholech, a  $M(x) = \sum_{n \geq 0} m_n \frac{x^n}{n!}$ . Ukažte, že  $M(x) = e^{x^2/2}$  (bez využití explicitního vzorce pro  $m_n$ ).