Eulerova a Heawoodova formule

30. března 2021

Definice

Eulerovský rod $g(\Sigma)$ *plochy* Σ *vzniklé přidáním* k *křižítek a* u *uch na sféru je*

$$g(\Sigma) := k + 2u.$$

Eulerovská charakteristika $\chi(\Sigma) = 2 - g(\Sigma)$.

Plocha	Eulerovský rod	Eulerovská charakteristika
sféra Σ_0	0	2
projektivní rovina Π_1	1	1
torus Σ_1	2	0
Kleinova láhev Π_2	2	0
double-torus Σ_2	4	-2
Σ_u	$2u$	$2 - 2u$
Π_k	k	$2 - k$

Věta (Zobecněná Eulerova formule)

Nechť G je nakreslený na ploše Σ. Pak

$$|E(G)| \leq |V(G)| + |F(G)| + g(\Sigma) - 2 = |V(G)| + |F(G)| - \chi(\Sigma).$$

Rovnost nastává právě když nakreslení G je <u>buňkové</u> (každá stěna je otevřený disk).

Důsledek

Nechť G je nakreslený na ploše Σ a má alespoň 3 vrcholy.

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| + 3g(\Sigma) - 6 = 3|V(G)| - 3\chi(\Sigma).$$

Rovnost nastává právě když G je triangulace Σ (každá stěna je otevřený disk ohraničený cyklem délky 3).

$$H(\Sigma) := \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 24g(\Sigma)}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(\Sigma)}}{2} \right\rfloor$$

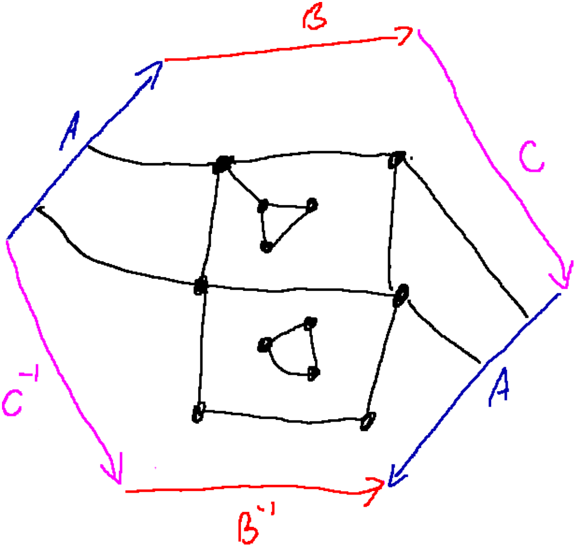
Věta (Heawoodova formule)

Každý graf nakreslený na ploše $\Sigma \neq \Sigma_0$ obsahuje vrchol stupně nejvýše $H(\Sigma) - 1$, a lze ho tedy obarvit $H(\Sigma)$ barvami.

Věta (Ringel, Youngs, . . .)

Na plochu $\Sigma \neq \Pi_2$ lze nakreslit $K_{H(\Sigma)}$.

Jaké stěny má následující nakreslení grafu na plochu? Určete také Eulerovu charakteristiku této plochy.



Nechť G je nakreslený na ploše Σ a má alespoň 3 vrcholy.
Ukažte, že ze zobecněné Eulerovy formule plyne

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 3\chi(\Sigma),$$

a jestliže G neobsahuje trojúhelník, pak

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 2\chi(\Sigma).$$

Ukažte, že jestliže

$$n > 4 - 2\chi(\Sigma),$$

pak $K_{3,n}$ nelze nakreslit na plochu Σ.

Ukažte, že na plochu Σ_u lze nakreslit $K_{3,2+2u} = K_{3,4-\chi(\Sigma_u)}$.

Ukažte, že libovolné nakreslení K_7 na plochu Eulerovské charakteristiky 0 je triangulace (buňkové a každá stěna je ohraničená cyklem délky 3).