

Burnsideovo lemma

26. května 2021

- **Akce** α grupy Γ na množině \mathcal{A} : Funkce $\Gamma \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tž.
 - $\alpha(\text{id}, x) = x$
 - $\alpha(\pi_1 \circ \pi_2, x) = \alpha(\pi_1, \alpha(\pi_2, x))$.
- **Orbita** $[x]$ prvku $x \in \mathcal{A}$: $\{\alpha(\pi, x) : \pi \in \Gamma\}$
- \mathcal{A}/Γ : množina všech orbit
- $\text{Fix}(\pi) = \{x \in \mathcal{A} : \alpha(\pi, x) = x\}$: množina **pevných bodů** π .
- $\text{Stab}(x) = \{\pi \in \Gamma : \alpha(\pi, x) = x\}$: **stabilizátor** x .

Theorem (Burnsideovo lemma)

Pro akci konečné grupy Γ na množině \mathcal{A} platí


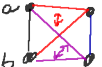
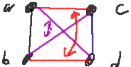

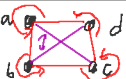
$$|\mathcal{A}/\Gamma| = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi \in \Gamma} |\text{Fix}(\pi)|$$

Pro $w: \mathcal{A}/\Gamma \rightarrow X$,

$$\sum_{o \in \mathcal{A}/\Gamma} w(o) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi \in \Gamma} \sum_{x \in \text{Fix}(\pi)} w([x]).$$

Příklad: Určete počet neizomorfních grafů na 4 vrcholech.

- \mathcal{A} = grafy na 4 vrcholech, Γ = permutace vrcholů
- $\alpha(\pi, (\{1, \dots, 4\}, E)) = (\{1, \dots, 4\}, \{\pi(u)\pi(v) : uv \in E\})$

permutace	#perm.	efekt na hraně	# pevných hodů
id	1		2^6
(ab)	6		2^4
(ab)(cd)	3		2^4
(abc)	8		2^2
(abcd)	6		2^2

$$|\mathcal{A}/\Gamma| = \frac{1}{24}(2^6 + 9 \cdot 2^4 + 14 \cdot 2^2) = 11$$

Mějme akci α grupy Γ na množině \mathcal{A} . Pro $x, y \in \mathcal{A}$ definujme

$$\text{Map}(x, y) = \{\pi \in \Gamma : \alpha(\pi, x) = y\}.$$

Ukažte, že:

- $\text{Map}(x, y) \neq \emptyset$ právě když $y \in [x]$.
- Pro každé $\pi \in \Gamma$ existuje právě jedno $y \in \mathcal{A}$ tž. $\pi \in \text{Map}(x, y)$.
- Jestliže $\alpha(\sigma, y) = y'$, pak funkce $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ definovaná jako $f(\pi) = \sigma \circ \pi$ je bijekce mezi $\text{Map}(x, y)$ a $\text{Map}(x, y')$.
- Pro každé $y \in [x]$ platí $|\text{Map}(x, y)| = |\text{Stab}(x)|$.

S použitím předchozího cvičení dokažte, že pro každé $x \in \mathcal{A}$ platí

$$|[x]| \cdot |\text{Stab}(x)| = |\Gamma|.$$

Každou ze stěn krychle obarvěme jednou z k barev. Kolik takových obarvení existuje, když obarvení, která se liší pouze rotací krychle, považujeme za stejná?

Pišme $G(x) = \sum_{n=0}^6 g_n x^n$, kde g_n je počet neizomorfních grafů na 4 vrcholech s n hranami. S pomocí vážené varianty Burnsideova lemmatu vyjádřete $G(x)$.