

Tutteho polynom

4. května 2021

Definice

Pro toto cvičení: **kostra** v (souvislém či nesouvislém) grafu G je maximální acyklický podgraf.

- $k(V, E) =$ počet komponent grafu (V, E)
- **Rank** $r(V, E) = |V| - k(V, E) =$ počet hran libovolné kostry grafu (V, E) .
- **Nulita** $n(V, E) = |E| - r(V, E) =$ počet hran mimo libovolnou kostru grafu (V, E) .



$$r = 8$$

$$n = 5$$

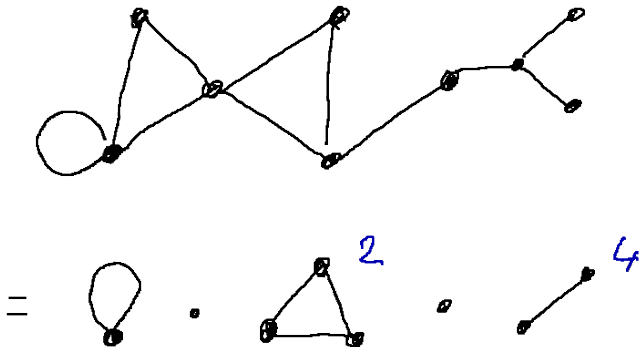
Definice

Tutteho polynom grafu G je

$$T_G(x, y) = \sum_{F \subseteq E(G)} (x-1)^{r(G)-r(F)} (y-1)^{n(F)}.$$

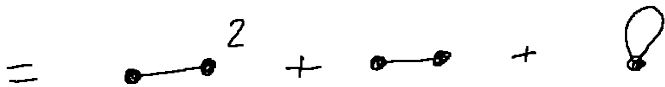
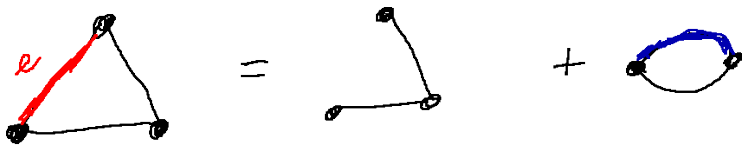
Lemma

Jestliže $|V(G_1 \cap G_2)| \leq 1$, pak $T_{G_1 \cup G_2} = T_{G_1} \cdot T_{G_2}$.

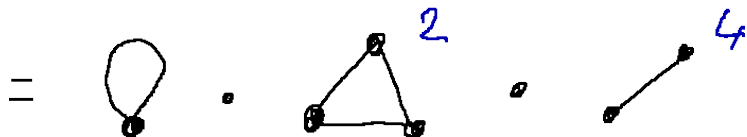
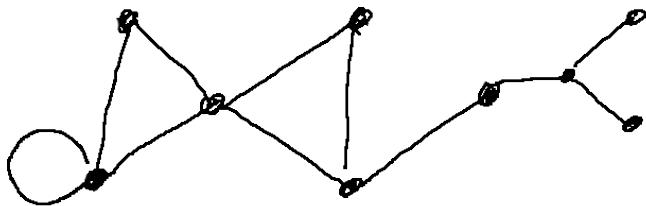


Věta

$$T_G = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } E(G) = \emptyset \\ xT_{G-e} = xT_{G/e} & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je most} \\ yT_{G-e} = yT_{G/e} & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je smyčka} \\ T_{G-e} + T_{G/e} & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ není most ani smyčka} \end{cases}$$



$$= X^2 + X + Y$$



$$= y (x^2 + x + y)^2 \cdot x^4$$

Definice

Chromatický polynom $\text{ch}_G(b) = \text{počet obarvení } G \text{ pomocí barev } \{1, \dots, b\}$.

$$A_{uv} = \{f : V(G) \rightarrow \{1, \dots, b\}, f(u) = f(v)\}$$

$$\begin{aligned}\text{ch}_G(b) &= b^{|V(G)|} - \left| \bigcup_{e \in E(G)} A_e \right| = b^{|V(G)|} - \sum_{\emptyset \neq F \subseteq E(G)} (-1)^{|F|+1} \left| \bigcap_{e \in F} A_e \right| \\ &= b^{|V(G)|} - \sum_{\emptyset \neq F \subseteq E(G)} (-1)^{|F|+1} b^{k(F)} \\ &= \sum_{F \subseteq E(G)} (-1)^{|F|} b^{k(F)} = b^{k(G)} \sum_{F \subseteq E(G)} (-1)^{|F|} b^{r(G)-r(F)} \\ &= (-1)^{r(G)} b^{k(G)} \sum_{F \subseteq E(G)} (-1)^{|F|-r(F)} (-b)^{r(G)-r(F)} \\ &= (-1)^{r(G)} b^{k(G)} \sum_{F \subseteq E(G)} (-1)^{n(F)} (-b)^{r(G)-r(F)} \\ &= (-1)^{r(G)} b^{k(G)} T_G(1-b, 0)\end{aligned}$$

Ukažte, že pro souvislý graf G platí:

- $r(F) = r(G)$ pro $F \subseteq E(G)$ právě když $(V(G), F)$ je souvislý
- $n(F) = 0$ pro $F \subseteq E(G)$ právě když $(V(G), F)$ je les
- $T_G(1, 2) =$ počet souvislých podgrafů G s množinou vrcholů $V(G)$
- $T_G(2, 1) =$ počet acyklických podgrafů G s množinou vrcholů $V(G)$
- $T_G(2, 2) = 2^{|E(G)|}$

Dokažte (z definice, bez použití vztahu k Tutteho polynomu), že

$$\text{ch}_G(b) = \begin{cases} b^{|V(G)|} & \text{jestliže } E(G) = \emptyset \\ (b-1)\text{ch}_{G/e}(b) & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je most} \\ 0 & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je smyčka} \\ \text{ch}_{G-e} - \text{ch}_{G/e} & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ není most ani smyčka} \end{cases}$$

S použitím předchozího cvičení dokažte vztah

$$\text{ch}_G(b) = (-1)^{r(G)} b^{k(G)} T_G(1 - b, 0)$$

indukcí podle počtu hran grafu G .

Nechť G je souvislý graf nakreslený v rovině a G^* je jeho duál.
Ukažte, že $T_G(x, y) = T_{G^*}(y, x)$.