

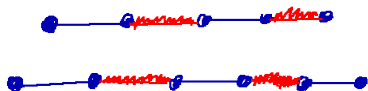
# Největší párování a Edmondsův algoritmus

2. března 2021

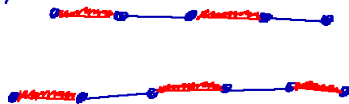
## Odevzdávat v OWLu, krátká písemka:

- Co je volná střídavá cesta? Jak volné střídavé cesty souvisí s velikostí párování?

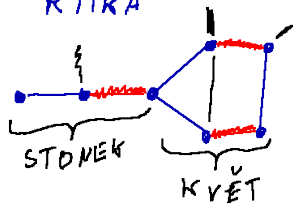
STRÍDAVÁ CESTA



PROHOZENÍ  
HRAN

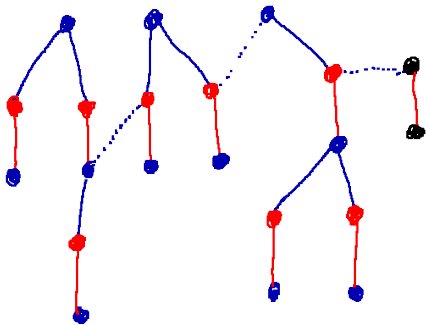


KYTKA



KONTRAKCE  
KVĚTU





① KOŘENÍ =  
VOLNÉ vrcholy

② LICHÉ vrstvy:  
PRÁVĚ JEDEN SYN,  
PŘES HRANU V  
PÁROVÁNÍ

③ SUDE vrstvy:  
VŠICHNI SOUSEDI  
JSOU V LESE

(a)  $\exists$  hrana mezi vrcholy v sudých vrstvách:  
volná střížková cesta nebo kytka

(b) sudé vrstvy tvoří nezávislou množinu: největší párování

- 1 Necht'  $M$  a  $M'$  jsou párování v grafu  $G$  tž.  $M'$  vznikne z  $M$  prohozením hran na střídané cestě sudé délky. Ukažte, že v  $G$  existuje volná střídaná cesta vůči  $M$  právě když taková cesta existuje vůči  $M'$ .
- 2 Necht'  $C$  je kytka v párování  $M$  v grafu  $G$  a necht'  $M/C$  je odpovídající párování v grafu  $G/C$  vzniklém kontrakcí květu  $C$ . Ukažte, že jestliže v  $G/C$  existuje volná střídaná cesta vůči  $M/C$ , pak v  $G$  existuje volná stř. cesta vůči  $M$ .
- 3 Ve stejné situaci: Předpokádejte, že  $C$  nemá stonek. Ukažte, že jestliže v  $G$  existuje volná střídaná cesta vůči  $M$ , pak v  $G/C$  existuje volná střídaná cesta vůči  $M/C$ .
- 4  $F \subseteq G$  je les z Edmondsova algoritmu pro párování  $M$ ;  $L$  a  $S$  vrcholy na lichých a sudých hladinách (kořeny = volné vrcholy, vrcholy v  $L$  mají právě jednoho syna v následující hladině spojeného hranou z  $M$ , všichni sousedi  $S$  jsou v  $F$ ). Předpokládejme, že  $S$  je nezávislá množina. Kolik má  $G - L$  jednovrcholových komponent, a co z toho plyne pro velikost největšího párování v  $G$ ?

Nechť  $M$  a  $M'$  jsou párování v grafu  $G$  tž.  $M'$  vznikne z  $M$  prohozením hran na střídací cestě sudé délky. Ukažte, že v  $G$  existuje volná střídací cesta vůči  $M$  právě když taková cesta existuje vůči  $M'$ .

Nechť  $C$  je kytka v párování  $M$  v grafu  $G$  a nechť  $M/C$  je odpovídající párování v grafu  $G/C$  vzniklém kontrakcí květu  $C$ . Ukažte, že jestliže v  $G/C$  existuje volná střídaná cesta vůči  $M/C$ , pak v  $G$  existuje volná stř. cesta vůči  $M$ .

Nechť  $C$  je kytka v párování  $M$  v grafu  $G$  a necht'  $M/C$  je odpovídající párování v grafu  $G/C$  vzniklém kontrakcí květu  $C$ . Předpokádejte, že  $C$  nemá stonek. Ukažte, že jestliže v  $G$  existuje volná střídavá cesta vůči  $M$ , pak v  $G/C$  existuje volná střídavá cesta vůči  $M/C$ .



$F \subseteq G$  je les z Edmondsova algoritmu pro párování  $M$ ;  $L$  a  $S$  vrcholy na lichých a sudých hladinách (kořeny = volné vrcholy, vrcholy v  $L$  mají právě jednoho syna v následující hladině spojeného hranou z  $M$ , všichni sousedi  $S$  jsou v  $F$ ).

Předpokládejme, že  $S$  je nezávislá množina. Kolik má  $G - L$  jednovrcholových komponent, a co z toho plyne pro velikost největšího párování v  $G$ ?