# 12. cvičení

**Konvergující podposloupnost.** Ukažte, že každá nekonečná omezená posloupnost (s reálnou horní i dolní mezí) má konvergující podposloupnost.

---

**Jednobarevné struktury.** Barvíme dvěma barvami hrany úplného grafu na $N$ vrcholech. Rozhodněte, zda pro dostatečně velké $N$ dostaneme následující jednobarevné struktury:

(1) úplný graf na $k$ vrcholech obsahující fixní vrchol $v$,
(2) úplný graf na $k$ vrcholech, když úplné grafy chápeme včetně smyček (tzn. barvíme hrany grafu $(V, \binom{V}{2} \cup \{\{v, v\} \mid v \in V\})$ kde $|V| = N$).
(3) alespoň $n$ vrcholově disjunktních úplných grafů na $k$ vrcholech

**Na pořadí záleží.** Rozhodněte, zda pro dostatečně velké $N$ pro každý graf na alespoň $N$ vrcholech platí:

(1) $K_{k,k}$ je podgraf $G$ nebo $K_{k,j}$ je podgraf doplňku $G$
(2) $K_{k,k}$ je podgraf $G$ nebo doplněk $K_{k,k}$ je podgraf $G$

**Dvoubarevný graf.** Dokažte, že pro každé $k \in N$ existuje $n \in N$ takové, že pro každý graf $G = (V, E)$ s alespoň $n$ vrcholy a každé jeho obarvení hran $c : E \to 1, 2$ existuje $U \subseteq V$ velikosti alespoň $k$ taková, že všechny hrany indukovaného podgrafu $G[U]$ mají stejnou barvu.

**Body v rovině 1.** Dokažte, že v každé dostatečně velké množině bodů v rovině bude libovolně velká podmnožina bodů na jedné přímce, nebo v obecné poloze (tzn. každá přímka obsahuje nejvýše 2 body).
*Hint:* použijte jednu z Ramseyových vět, kterou jsme dokázali na přednášce.

**Hamiltonovská kružnice.** Ukažte, že obarvíme-li libovolně hrany úplného grafu na alespoň třech vrcholech dvěma barvami, potom lze vždy nalézt hamiltonovskou kružnici takovou, že je buď celá jednobarevná, nebo její hrany lze rozdělit na dvě jednobarevné cesty.
*Hint:* indukcí.

---

**Obarvení roviny.** Ukažte, že jsou-li body eukleidovské roviny $\mathbb{R}^2$ libovolně obarveny pomocí tří barev, pak lze vždy nalézt dva body stejné barvy v jednotkové vzdálenosti.

**Body v rovině 2: Erdös-Szekeres.** Ukažte, že dostatečně velká množina bodů v rovině v obecné poloze obsahuje libovolně velkou podmnožinu bodů v konvexní poloze. (Body jsou v konvexní poloze, když žádný bod neleží v konvexním obalu jiných bodů, tzn. není konvexní kombinací jiných bodů.)