10. cvičení

Lepení uší. Rozmyslete, že lepení uší je skutečně ekvivalentní posloupnosti operací "přidej hranu"a "podrozděl hranu".

Druhý směr lepení. Rozmyslete, že skutečně každý graf, který vznikne lepením uší je vrcholově 2-souvislý.

Kubický bipartitní. Ukažte, že každý souvislý kubický bipartitní graf je nutně vrcholově 2-souvislý.

Silná Mengerova věta: *Graf G je hranově k-souvislý, pokud pro každé dvě množiny vrcholů A, B, $|A|, |B| \geq k$, platí, že existuje k hranově disjunktních cest z k různých vrcholů v A do k různých vrcholů v B.*
Úkol: dokažte silnou Mengerovu větu.

Dlouhý cyklus. Ukažte, že každý k-souvislý graf na alespoň $2k$ vrcholech obsahuje cyklus délky alespoň $2k$.

Problém jednosměrek. Ulice a křižovatky v malém městečku tvoří graf – křižovatky si představujeme jako vrcholy a ulice jako hrany grafu. Dokažte, že je-li graf dvousouvislý, potom lze ze všech ulic udělat jednosměrky tak, aby bylo možno projet autem z každé křižovatky na každou jinou křižovatku bez porušení dopravních předpisů. (Takové orientaci se říká silně souvislá orientace.)
Rozhodněte, zdali platí i obrácená implikace: „Má-li graf silně souvislou orientaci, pak je dvousouvislý."

Hammingův kód z přednášky. Ukažte, že každá dvě kódová slova H se liší alespoň ve 3 souřadnicích. Pak ukažte, že každý vektor $x \in \mathbb{Z}_2^7$ je ve vzdálenosti nanejvýš jedna od právě jednoho kódového slova H.

Doplněk kódu. *(Následující tvrzení se nám bude hodit na příští přednášce.)* Mějme vektorový prostor $\mathbb{Z}_p^n$ a nějaký jeho vektorový podprostor P generovaný maticí A, tzn. $P = \{x \mid \exists y : y^\intercal A = x\}$, neboli x je lineární kombinace řádků A. Ortogonální doplněk $P^\perp = \{x \mid Ax = 0\}$ neboli množina takových vektorů, které jsou kolmé na všechny vektory z P, tzn. platí $P^\perp = \{x \mid \forall x' \in P : x^\intercal x' = 0\}$.
Dokažte, že

$$\dim P + \dim P^\perp = n \ .$$