koutecky@iuuk.mff.cuni.cz

9. cvičení

SRR atd.

Stupeň aspoň $n/2$. Mějme bipartitní graf G s n vrcholy v obou partitách, a minimálním stupněm $n/2$. Dokažte, že G má perfektní párování.

0.1. **Malé průniky.** Mějme systém $\mathcal{S}$ obsahující n^2 množin velikosti n splňující $\forall M_1 \neq M_2 \in \mathcal{S} : |M_1 \cap M_2| \leq 1$. Dokažte, že lze najít unikátní reprezentanty pro všechny množiny.
Vhodný postup: Uvažte sporem nějaký podsystém, který nelze reprezentovat. Najděte prvek s mnoha výskyty a ukažte, že sjednocení množin, které ho obsahují, popírá předpoklady o podsystému.

Souvislost

Kubické grafy. Dokažte, že pro kubické (3-regulární) grafy hranová a vrcholová souvislost koincidují. Ukažte, že každý souvislý kubický bipartitní graf je hranově 2-souvislý.

Kontrakce hrany. Rozhodněte, jak se mohou změnit vrcholová a hranová souvislost pokud kontrahujeme jednu hranu.

Silně souvislá orientace. Dokažte, že graf je hranově 2-souvislý právě když má silně souvislou orientaci.

Vrcholy na společné kružnici. Dokažte, že pokud je graf vrcholově 2-souvislý, potom každé dva jeho vrcholy leží na společné kružnici. Rozšiřte úvahu na vrcholovou 2-souvislost a dvojici hran; a na hranovou 2-souvislost a dvojici hran.
Hint: Pro rozšiřování si zavedeme umělé vrcholy.

Vrcholy na společné kružnici II. Dokažte, že ve vrcholově k-souvislém grafu libovolných k vrcholů leží na společné kružnici.
Vhodné nástroje: spor, indukce, Mengerova věta, Dirichletův princip