8. cvičení

Toky

Políčkožrout I. Mějme šachovnici $r \times s$, z níž políčkožrout sežral některá políčka. Chceme na ni rozestavět co nejvíce šachových věží tak, aby se navzájem neohrožovaly. Věž můžeme postavit na libovolné nesežrané políčko a ohrožuje všechny věže v témže řádku i sloupci. Navrhněte efektivní algoritmus, který takové rozestavění najde.

Políčkožrout II. Situace stejná jako v minulém cvičení, ale dvě věže se neohrožují přes sežraná políčka.

Políčkožrout III. Opět šachovnice po zásahu políčkožrouta. Chceme na nesežraná políčka rozmístit kostky velikosti 1×2 políčka tak, aby každé nesežrané políčko bylo pokryto právě jednou kostkou. Kostky je povoleno otáčet.

Hyperkrychle. Mějme graf Q hyperkrychle dimenze d s jednotkovými kapacitami. Určete velikost maximálního toku mezi všemu dvojicemi různých vrcholů.

Aplikace toků

Nechť X, I jsou konečné množiny. *Množinovým systémem nad* X nazveme $|I|$-tici $\mathcal{M} = (M_i \colon i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. *Systém různých reprezentantů* (SRR) je prostá funkce $f : I \to X$ taková, že pro každé $i \in I$ je $f(i) \in M_i$. Víme, že existence SRR v $\mathcal{M}$ je ekvivalentní s existencí párování velikosti $|I|$ v incidenčním grafu $\mathcal{M}$.

Hallova věta. *SRR v $\mathcal{M}$ existuje právě tehdy, když pro každou $J \subseteq I$ je $|\bigcup_{j \in J} M_j| \geq |J|$; tato podmínka se nazývá Hallova.*

Existence SRR. Nechť a, b, c, d, e jsou různé prvky.

(1) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami $\{a, b, c, d\}$ systém různých reprezentantů? (tj. systém množin $\binom{\{a,b,c,d\}}{3}$).

(2) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami $\{a, b, c, d, e\}$ systém různých reprezentantů? (tj. systém množin $\binom{\{a,b,c,d,e\}}{3}$).

Domotaný König. Ujistěte se, že rozumíte důkazu Königovy věty, který byl na přednášce domotán. (Königova věta je: v bipartitním grafu se rovná velikost největšího párování a nejmenšího vrcholového pokrytí. Vrcholové pokrytí $U \subseteq V$ splňuje $\forall e \in E \exists u \in U : u \in E$; párování je $M \subseteq E$ t.ž. $\forall e, e' \in M : e \cap e' = \emptyset$.)

Perfektní párování. Dokažte, že pro $k \geq 1$ lze hrany libovolného k-regulárního bipartitního grafu vyjádřit jako sjednocení k disjunktních perfektních párování.

Petersenova perfektní párování. Najděte všechna perfektní párování v Petersenově grafu. Ukažte, že jich víc neexistuje. (Párování je *perfektní*, pokud pokrývá všechny vrcholy.)
Hint: dokažte, že každá hrana leží v právě dvou perfektních párováních.

Hall a nekonečné množiny. Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocené libovolné k-tice množin z $\mathcal{M}$ aspoň k prvků), ale nemá systém rúzných reprezentantů.