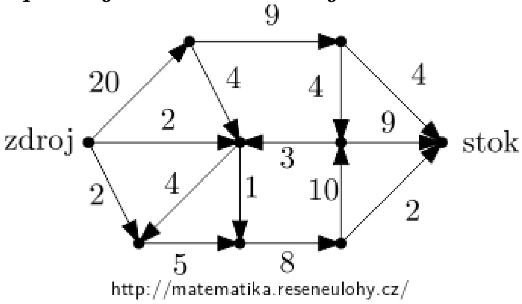
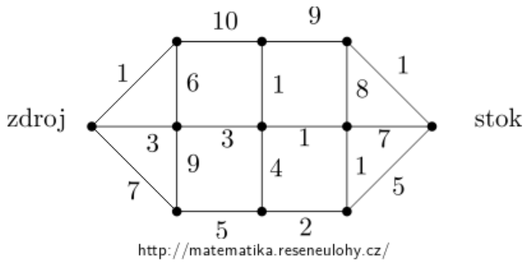
# 7. cvičení



## Toky v sítích

**Spočítejte tok v následujících dvou sítích a dokažte, že je maximální:**




**Tok v mřížce.** Nechť $G = (V, E)$ je síť tvaru mřížky $5 \times 5$, t.j.

$$\begin{aligned} V &= \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\} \\ E &= \{((x,y),(x+1,y)), 1 \le x \le 4, 1 \le y \le 5\} \cup \\ &\quad \{((x,y),(x,y+1)), 1 \le x \le 5, 1 \le y \le 4\} \end{aligned}$$

s kapacitami

$$c((x,y),(x',y')) = \frac{1}{\min\{x+y-1, 10-x-y\}}.$$

Určete maximální tok ze zdroje $z = (1,1)$ do spotřebiče $s = (5,5)$.

**Podgraf s předepsanými stupni.** Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný graf bez smyček a paralelních hran a nechť $p, q \colon V \to N_0$ jsou libovolné funkce. Uvažte problém, zda existuje orientovaný podgraf $H \subseteq G$ obsahující všechny vrcholy takový, že $d^-_H(v) = p(v)$ a $d^+_H(v) = q(v)$ pro všechny $v \in V$. Formulujte tuto úlohu jako úlohu pro hledání toku v síti.

## Konečné projektivní roviny a spol.

**Barvení Fanovy roviny.** Ukažte, že body Fanovy roviny není možné obarvit dvěma barvami tak, aby žádná přímka neměla všechny body ve stejné barvě. Kolik barev potřebujeme, pokud požadujeme, aby všechny body v každé přímce měly vzájemně různé barvy?

**Skoromagický čtverec.** Z ortogonálních latinských čtverců $A$ a $B$ řádu $n$ sestavených z čísel $1, \dots, n$ definujme čtverec $C$ tak, že $c_{i,j} = na_{i,j} + b_{i,j} + 1$. Jaké zvláštní vlastnosti má výsledný čtverec $C$? (Jaká je množina jeho symbolů? Jakou vlastnost sdílí každý jeho řádek i sloupec?)

**Graf projektivní roviny.** Nechť $(X, \mathcal{P})$ je KPR řádu $q$. Vytvořme bipartitní graf $G = G(X, \mathcal{P})$ s částmi $X$ a $\mathcal{P}$ tak, že bod $x \in X$ a přímka $p \in \mathcal{P}$ jsou spojeny hranou, právě když $x$ náleží $p$. (Tedy jedná se o incidenční graf množinového systému $(X, \mathcal{P})$.)

(1) Určete obvod $g$ grafu $G$. (Obvodem grafu, který obsahuje alespoň jednu kružnici, rozumíme velikost nejmenší kružnice v grafu obsažené.)
(2) Určete počet kružnic v $G$ velikosti $g$ (kde $g$ je obvod, zjištěný v předchozí úloze.)
(3) Nechť $H$ je bipartitní $(q+1)$-regulární graf (tj. každý vrchol má stupeň $q+1$) pro $q \ge 2$, bez kružnic velikosti 4 a takový, že mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta délky nejvýše 3 spojující tyto dva vrcholy. Dokažte, že $H$ je izomorfní $G(X\ , \mathcal{P}\ )$ pro nějakou konečnou projektivní rovinu $(X\ , \mathcal{P}\ )$ řádu $q$.