koutecky@iuuk.mff.cuni.cz

6. cvičení

11. listopadu 2020

Něco z minula...

Trojúhelníčky. Mějme pravidelný šestiúhelník o délce strany k vydlážděný jednotkovými rovnostrannými trojúhelníky. Nahlédněte, že počet perfektních párování sousedních trojúhelníků je roven počtu zobrazení $f : [k] \times [k] \to [k+1]$, která jsou neklesající v obou argumentech (tzn. $f(i,j) \geq f(i-1,j), f(i,j-1), f(i-1,j-1)$ pro všechna $i,j \in [1,k]$).

Osvobozené čtverce. Definujme *osvobozený* čtverec řádu n jako čtvercovou tabulku $n \times n$, v jejíž každém políčku je některé z čísel $1, 2, \dots, n$ a zároveň se v ní každé číslo vyskytuje přesně n-krát. Ortogonalitu pro osvobozené čtverce definujeme stejně jako pro čtverce latinské. Pro nějaké číslo $t \geq 0$, uvažme následující dvě podmínky:

(1) Existuje t navzájem ortogonálních latinských čtverců řádu n.
(2) Existuje $t+2$ navzájem ortogonálních osvobozených čtverců řádu n.

Dokažte, že tyto podmínky jsou ekvivalentní.

Počet jednotkových trojúhelníků. Mějme n bodů v rovině, přičemž žádné tři body neleží na společné přímce. Dokažte, že počet trojúhelníků s jednotkovým obsahem není větší, než $\frac{2}{3}(n^2 - n)$. (Pozn.: trojúhelníky se můžou překrývat.)

Toky v sítích

Toky s více zdroji a spotřebiči. Co kdybych rozšířil problém maximálního toku tak, že mám více zdrojů $z_1, \dots, z_k$ a více spotřebičů $s_1, \dots, s_\ell$? Co lze říct o velikosti maximálního toku či minimálního řezu? Lze tento problém efektivně řešit?

Kapacity ve vrcholech. Co když máme kapacity ve vrcholech místo hran (formálně: $c : V \to \mathbb{R}_+$)? Vyslovte a dokažte analogii minimaxové věty. Lze tento problém efektivně řešit?

Spočítejte tok v následujících dvou sítích a dokažte, že je maximální: