4. várka DÚ

Balíček karet. [karty] Mějme balíček 52 karet skládající se ze čtyř barev (srdce, kára, piky, kříže) a 13 hodnot, neboli jde o balíček standardních pokerových karet. Karty rozdělíme do 13 hromádek po 4 kartách. Dokažte, že lze vybrat z každé hromádky jednu kartu tak, že výsledný výběr 13 karet obsahuje všechny hodnoty. [5b]

Počet koster. [kostry] Spočítejte počet koster grafu $K_p \oplus_e C_q \oplus_f K_r$, kde $\oplus_e$ značí slepení za hranu e. Hrany $e, f \in E(C_q)$ nemají společný vrchol. [8b]

Počet orientovaných trojúhelníčku. [trojuhelnicky] Mějme úplný graf na n vrcholech, s libovolnou orientací hran. Ukažte, že cyklicky orientovaných trojúhelníků je zhruba nejvýše čtvrtina. (pod 'zhruba' myslíme, že poměr konverguje k 1/4 pro $n \to \infty$). O něco snadněji lze dokázat 1/2, na 1/4 se lze dostat jenom maličko přesnější úvahou.
Pro důkaz tvrzení pomůže počítat 'vidličky' (dvojice incidentních hran), a to pouze vidličky s určitou orientací hran. Jako vždy, dokážeme vidličky počítat dvěma způsoby, z pohledu trojúhelníků, a z pohledu společného vrcholu. Na jedné straně použijeme odhad.
Pomůže také následné tvrzení. Mějme celá čísa a, b t.ž. $a + b = d$ pro fixní d. Potom $a = \lceil \frac{d}{2} \rceil$ a $b = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ maximalizují produkt $a \cdot b$.
Můžete předpokládat, že n má vhodnou paritu, a že $n \to \infty$ (pro zjednodušení výpočtů zahazováním členů bez zásadního vlivu). [9b]

Společná kružnice. [kruznice] Dokažte, že ve vrcholově k-souvislém grafu libovolných k vrcholů leží na společné kružnici.
Vhodné nástroje: indukce dle počtu vrcholů na kružnici, (silná) Mengerova věta, Dirichletův princip [7b]

Souvislost. [souvislost] Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:

(1) Pro každý vrcholově 3-souvislý graf, každou dvojici jeho vrcholů x, y a libovolnou xy-cestu P_1 existuje xy-cesta P_2 taková, že P_1 a P_2 jsou vrcholově disjunktní.
(2) Pro každý vrcholově 3-souvislý graf a libovolné jeho vrcholy x, y, z existuje kružnice procházející x a y, ale neprocházející z.
(3) Pro každé k existuje ℓ takové, že hranově ℓ-souvislý graf je nutně i vrcholově k-souvislý. [3 × 3b]