koutecky@iuuk.mff.cuni.cz

5. cvičení

Počítání s většinou I. Při zápočtové písemce každý student vyřešil aspoň třetinu všech úloh, a navíc alespoň polovina studentů vyřešila aspoň dvě třetiny úloh. Ukažte, že v písemce existuje úloha, kterou vyřešila alespoň polovina studentů.

Počítání s většinou II. Dvacet studentů psalo písemku, která měla čtyři úlohy. Pro každou dvojici studentů bychom v písemce našli úlohu, kterou oba vyřešili správně. Dokažte, že některou z úloh správně vyřešila více než polovina studentů.

Maximální antiřetězec. V uspořádání $(2^{\{1,2,\ldots,8\}}, \subseteq)$ určete velikost maximálního antiřetězce obsahujícího množiny $\{1\}$ a $\{8\}$. *Hint: Sperner.*

Kvadrangulace. Určete počet vrcholů rovinné kvadrangulace (grafu, jehož všechny stěny jsou C_4) s f stěnami. Určete vztah mezi počten stěn, hran a vrcholů pro rovinný graf, jehož nejkratší cyklus má délku alespoň 4. *Hint: Tento důkaz jste už nejspíš jednou viděli.*

Počet koster. Určete počet koster následujících grafů.

(1) $C_m \oplus_e C_n$ ($\oplus_e$ značí slepení dvou grafů za hranu)
(2) $C_m \oplus_e K_n$ (*Hint: dokažte, že počet koster K_n obsahujících pevně zvolenou hranu e je $2n^{n-3}$ a pak tento fakt použijte.*)
(3) $K_n e$ (e je podrozdělení hrany e)
(4) $K_n E$ (podrozdělím všechny hrany)

Trojúhelníčky. Mějme pravidelný šestiúhelník o délce strany k vydlážděný jednotkovými rovnostrannými trojúhelníky. Nahlédněte, že počet perfektních párování sousedních trojúhelníků je roven počtu zobrazení $f : [k] \times [k] \to [k+1]$, která jsou neklesající v obou argumentech (tzn. $f(i,j) \geq f(i-1,j), f(i,j-1), f(i-1,j-1)$ pro všechna $i,j \in [1,k]$).