Rekurence.

(1) $a_0 = 1; a_n = 2a_{n-1} + 3$
(2) $a_0 = 1; a_1 = 2; a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$
(3) $a_0 = 0; a_1 = 1; a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2$
(4) $a_0 = 2; a_1 = 3; a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$

Projektivní rovina je množinový systém (B, P), kde B je množina bodů a $P \subset 2^B$ je množina přímek s následujícími vlastnostmi:

P0 Existuje $C \subseteq B$, $|C| = 4$ taková, že pro každou přímku $p \in P$ platí $|p \cap C| \leq 3$.
P1 Pro kadou dvojici přímek $p_1, p_2 \in P$, $p_1 \neq p_2$ platí, že existuje právě jeden bod $b \in B$ takový, že $b \in p_1 \cap p_2$.
P2 Pro každou dvojici bodů $b_1, b_2 \in B$, $b_1 \neq b_2$ platí, že existuje právě jedna přímka $p \in P$ taková, že $b_1, b_2 \in p$.

Proč $P0$**.** Najděte příklad množinového systému (B, P) na konečné množině B, který splňuje podmínky $P1$,$P2$, ale nesplňuje podmínku $P0$.

Graf bez C_4**.** Dokažte, že pro nekonečně mnoho různých n existují grafy na n vrcholech s $\Omega(n^{3/2})$ hranami, které neobsahují jako podgraf čtyřcyklus C_4. Ke konstrukci můžete elegantně využít konečné projektivní roviny (nějaké pozorování o nich + fakt, že pro každé nekonečně mnoho různých n existuje KPR řádu n.)

Alternativní $P0$**.** Nechť B je konečná množina a P systém jejích podmnožin, které splňují $P1, P2$ a následující axiom:

$P0'$ Existují alespoň dvě různé přímky $p_1, p_2 \in P$, z nichž každá má alespoň 3 body.

Dokažte, že se jedná o KPR (tzn. že $P1, P2, P0'$ implikují $P0$).

Jak vynutit KPR. Nechť $n \geq 2$, (B, P) je systém podmnožin, kde $|B| = n^2 + n + 1 = |P|$. Pro každou množinu $p \in P$ platí $|p| = n + 1$ a pro každou dvojici množin $p_1, p_2 \in P$ platí $|p_1 \cap p_2| \leq 1$. Dokažte:

(1) pro každé $x, y \in B$ existuje právě jedna přímka $p \in P$ taková, že $x, y \in p$
(2) každým bodem prochází nejvýše $n + 1$ množin
(3) každým bodem prochází práve $n + 1$ množin
(4) pro každé dvě množiny $p_1, p_2 \in P$ platí $|p_1 \cap p_2| \neq \emptyset$
(5) (B, P) je projektivní rovina řádu n