2. cvičení

Vytvořující funkce a obecná binomická věta

Věta (*Zobecněná binomická věta*): Pro libovolné reálné číslo r a nezáporné celé číslo k definujeme kombinační číslo jako

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

(speciálně kladaeme $\binom{r}{0} = 1$). Potom funkce $(1+x)^r$ je vytvořující funkcí pro posloupnost $(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots)$ (přičemž mocinná řada $\binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \cdots$ vždy konverguje pro $|x| < 1$).

Důsledek (*Specializace pro celočíselné záporné r*): Nechť r je celočíslné záporné. Pak máme $\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{-r+k-1}{k} = (-1)^k \binom{-r+k-1}{-r-1}$. Tím pádem dostáváme

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1}x + \binom{n+1}{n-1}x^2 + \cdots + \binom{n+k-1}{n-1}x^k + \cdots \quad .$$

Příklad 1: dokažte tento důsledek.

Definice (*Konvoluce posloupností*): Jsou dány posloupnosti $(a_0, a_1, \dots)$ a $(b_0, b_1, \dots)$ a k nim příslušející vytvořující funkce $a(x)$ a $b(x)$. Pak posloupnost $(a_0b_0, a_1b_0 + b_1a_0, a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2, \dots)$ má vytvořující funkci $a(x)b(x)$; n-tý člen této posloupnosti je přesně $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Příklad 2: Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti:

- $(-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$, tedy $a_i = (-1)^i$
- $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$, tedy $a_i = i$
- $(1, 2, 1, 4, 1, 8, 1, 16, \dots)$
- $(\sum_{j=0}^{i} a_j)_i$ pro danou poslopunost $(a_i)_i$ s vytvořující funkcí $a(x)$

Příklad 3: Najděte příslušné koeficienty u následujících funkcí

- $[x^4]$ funkce $\sqrt{1+x}$
- $[x^{15}]$ funkce $(1-2x)^{-2}$
- $[x^{50}]$ funkce $(x^{10} + \cdots + x^{20})(x^{10} + x^{11} + x^{12} + \dots)^2$,

Hint: Třetí funkci nejprve zjednodušte, výsledný výraz je tak jednoduchý, že jde dopočítat z hlavy

Příklad 4: Chceme koupit 50 kusů limonád. Na výběr máme 3 druhy, chceme od každého druhu alespoň 10 kusů. Obchod má pouze 20 kusů červených, 30 kusů zelených a 40 kusů žlutých. Kolika způsoby můžeme nákup provést?
Nalezněte řešení jako koeficient polynomu nějaké vytvořující funkce.
Hint: úloha by už měla být vyřešena

Příklad 5: Sečtěte řady (pomocí vytvořujících funkcí)

$$\sum_{k=0}^{n} k$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{n-k}}{k}$$