

Beztrójuhelníkový je 4-obarvitelný. Dokažte, že rovinný graf bez trojúhelníků lze vždy obarvit 4 barvami.

Vnějškově rovinný je 4-obarvitelný. Řekneme, že rovinný graf G je *vnějškově rovinný*, pokud má takové nakreslení, kde všechny jeho vrcholy leží na vnější stěně.

Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf má obarvení 4 barvami.

Barevnost duálu. Ukažte, že má-li rovinný graf sudé stupně, pak lze jeho duál obarvit dvěma barvami

Doplňk rovinného grafu. Dokažte, že je-li G rovinný graf na alespoň 11 vrcholech, pak jeho doplněk $\overline{G}$ nemůže být rovinný.

Platónská tělesa. Nakreslete grafy všech pěti pravidelných mnohostěnů. Nahlédněte, že jsou rovinné. Jak vypadají jejich duály?

Asi jste si všimli, že graf platónského tělesa je souvislý, rovinný a k -regulární s takovým rovinným nakreslením, že všechny stěny mají délku ℓ (pro nějaké $k, \ell \in \mathbb{N}$). Označme $n = |V(G)|$. Postupně dokažte:

- (1) Platí $n(2k + 2\ell - k\ell) = 4\ell$.
- (2) Jediné možnosti pro (k, ℓ) jsou $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$.