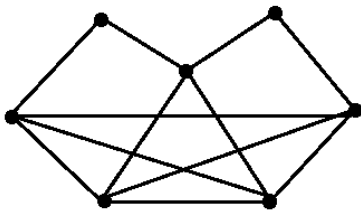


## 10. cvičení

**Jedním tahem.** Nakreslete graf jedním tahem:



Pokud se vám to nedaří (ale i pokud ano), zkuste si vzpomenout, jak by se na to šlo podle důkazu Eulerovy věty z přednášky.

**Orientované eulerovské grafy.** Necht  $G$  je orientovaný graf, tzn.  $E \subseteq V \times V$  (hrany jsou šipky).  $G$  je *silně souvislý*, pokud pro každé dva vrcholy  $u, v$  existuje orientovaná cesta jak z  $u$  do  $v$ , tak z  $v$  do  $u$ , a je *slabě souvislý* pokud je  $G$  souvislý, když zapomeneme orientace hran (formálně: pokud je souvislý jeho *podkladový graf*  $G' = (V(G), \{uv \mid (u, v) \in E(G), (v, u) \in E(G)\})$ ). Dále  $d^+(v)$  značí počet hran přicházejících do  $v$  a  $d^-(v)$  počet hran odcházejících z  $v$  a říká se jim vstupní a výstupní stupeň, či anglicky indegree a outdegree. Dokažte, že  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$  (což nakonec dá ekvivalenci všech výroků).

- (1)  $G$  má uzavřený eulerovský tah,
- (2)  $G$  je silně souvislý a  $\forall v \in V : d^+(v) = d^-(v)$ ,
- (3)  $G$  je slabě souvislý a  $\forall v \in V : d^+(v) = d^-(v)$ .

**Rozklad na kružnice.** Dokažte, že hrany každého eulerovského grafu lze rozložit na sjednocení kružnic, tzn. v  $G$  existuje  $k$  kružnic s množinami hran  $E_1, E_2, \dots, E_k$  t.ž.  $E = E_1 \dot{\cup} E_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} E_k$  (" $\dot{\cup}$ " značí *disjunktní sjednocení*, tzn. každá hrana leží v právě jedné  $E_i$ ).

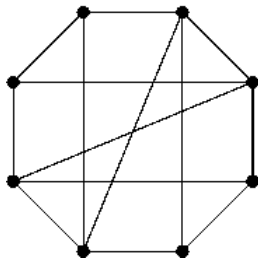
**Cracking kódu.** Garáž se odemká 0/1 kódem délky 8, ale dozvěděli jste se o bezpečnostní díře, totiž že není nutné se zadáváním pokaždé začínat odznovu. Například, je-li kód 01010101, tak dveře odemkne zadání jakékoliv posloupnosti, která končí správným kódem, třeba 1101001010101. Najděte způsob, jak zkonstruovat co nejkratší posloupnost 0/1, která obsahuje jako (souvislou) podposloupnost každou 0/1 posloupnost délky 8 (tzn. každý potenciální odemkací kód).

Zobecněte svůj postup pro libovolné  $n$ , tedy najděte co nejkratší 0/1 posloupnost, která jako (souvislou) podposloupnost obsahuje každou 0/1 posloupnost délky  $n$ . Jak dlouhá je vaše posloupnost, tedy jaký je váš horní odhad na tu nejlepší hodnotu? Jak dlouhá musí být jakákoliv taková posloupnost, tedy jaký je váš dolní odhad na tu nejlepší hodnotu?

**Kolik tahů?** Kolika nejméně (otevřenými a uzavřenými) tahy lze nakreslit jakýkoliv souvislý graf? (Neboli: na kolik nejméně tahů lze rozložit jeho množinu hran?)

### ROVINNÁ NAKRESLENÍ

**Je rovinný?** Rozhodněte, zda je následující graf rovinný.



**Rovinný 5-regulární.** Najděte rovinný graf, jehož každý vrchol má stupeň 5.

**Petersen.** Dokažte nerovinnost Petersenova grafu (bude na začátku nakreslen).

**Doplňěk rovinného grafu.** Dokažte, že je-li  $G$  rovinný graf na alespoň 11 vrcholech, pak jeho doplněk  $\overline{G}$  nemůže být rovinný.