

GRAFY OBECNĚ

Lichý cyklus. Ukažte, že když graf G obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak taky obsahuje lichý cyklus jako indukovaný podgraf. (*Lichý cyklus* je cyklus liché délky.)

Doplněk bipartitního. Existuje bipartitní graf s alespoň 5 vrcholy, jehož doplněk je taky bipartitní?

Různé stupně. Existuje graf, jehož všechny vrcholy by měly různé stupně?

Mocniny A . Nechť G je graf a A je jeho matice sousednosti, tzn. $A_{uv} = 1$ pokud $uv \in E$, jinak $A_{uv} = 0$. Popište, co je A_{uv}^k , kde A^k je k -tá mocnina A . *Hint:* Nějak to souvisí se sledy délky k ...

Diagonála A^3 . Jaké prvky jsou na hlavní diagonále A^3 , tj. třetí mocniny A ?

STROMY

Alespoň dva listy. Dokažte, že každý strom na alespoň dvou vrcholech obsahuje alespoň dva listy. (Na přednášce se ukázalo, že má alespoň jeden list.)

Košaté stromy. Dokažte, že obsahuje-li strom vrchol stupně k , pak v něm je alespoň k listů

Kostra. Definujme kostru grafu jako podgraf, který obsahuje všechny vrcholy a je to strom. Dokažte, že každý souvislý graf má kostru.

Pořadí vrcholů. Ukažte, že pro každý strom s n vrcholy existuje pořadí vrcholů $\{v_1, \dots, v_n\}$ takové, že v_i má právě jednoho souseda v množině $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$, pro každé $i = 1, \dots, n-1$.

Nezávislá ve stromu. Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. (Nezávislá množina je množina vrcholů, mezi nimiž nejsou žádné hrany.)