

STŘEDNÍ HODNOTA

Náhodná veličina je funkce $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. (Příklad: házíme dvěma kostkami, jevy jsou dvojice čísel – co padlo na první a druhé kostce; náhodná veličina je např. součet nebo součin čísel, které padly.)

Náhodné veličiny X, Y jsou *nezávislé* pokud pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou jevy “ $X > \alpha$ ” a “ $Y \geq \beta$ ” nezávislé.

Střední hodnota náhodné veličiny X , značíme $\mathbb{E}[X]$, je definována jako $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] \cdot X(\omega)$. Intuitivně je to tedy průměr hodnot náhodné veličiny X přes elementární jevy $\omega \in \Omega$, který je vážený a váhy jsou pravděpodobnosti elementárních jevů (tedy $\Pr[\omega]$)

Důležitá vlastnost střední hodnoty je její *linearita*: pro skalár $\alpha \in \mathbb{R}$ a dvě náhodné veličiny X, Y platí, že $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ a $\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha \mathbb{E}[X]$. (Plyne to snadno z definice.)

Metoda indikátorů je oblíbený trik, který používá právě linearitu střední hodnoty. Mějme jev $A \subseteq \Omega$. Na jeho základě můžeme definovat *indikátorovou náhodnou veličinu* I_A (krátce “indikátor”), což je funkce, která je 1 pokud jev A nastal a 0 pokud nenastal. Např. $A = \{2, 4, 6\}$ “padlo sudé číslo”, $I_A(2) = I_A(4) = I_A(6) = 1$, ale $I_A(1) = I_A(3) = I_A(5) = 0$. Hezká vlastnost indikátorů je, že platí $\mathbb{E}[I_A] = \Pr[A]$, tedy např. $\Pr[A] = 1/2$ (pro šestistěnnou kostku) a snadno se ověří, že $\mathbb{E}[I_A] = 1/2$. Konečně tedy co je metoda indikátorů – často chceme zkoumat náhodnou veličinu X , kterou lze zformulovat jako součet nějakých indikátorů $I_1, I_2, \dots, I_k$, tedy $X = I_1 + I_2 + \dots + I_k$. (Pozor, $X, I_1, \dots, I_k$ jsou všechno *funkce*, to se často plete.) Je-li snadné určit $\Pr[I_j]$ a tedy i $\mathbb{E}[I_j]$, tak je snadné určit i $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[I_1 + \dots + I_k] = \mathbb{E}[I_1] + \dots + \mathbb{E}[I_k] = \Pr[I_1] + \dots + \Pr[I_k]$.

S pomocí metody indikátorů vyřešte následující úlohu:

Zajíci. Každý z n lovců zamíří na jednoho náhodně vybraného z n zajíců. Všichni myslivci naráz vystřelí a trefí zajíce, na kterého mířili. Náhodná veličina Z určuje počet přeživších zajíců. Spočítejte střední hodnotu Z .

První jednička. Mějme následující experiment: Házáme férovou mincí tak dlouho, dokud nepadne první hlava. Zkonstruuje pravděpodobnostní prostor (nebude konečný, ale s tím si poradíte :)), který je modelem tohoto experimentu, a určete střední hodnotu počtu hodů.

MARKOV

Markovova nerovnost: pro nezápornou n.v. X a $a > 0$ je $\Pr[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$.

Kostky a Markov. Předpokládejme, že hodíme stokrát spravedlivou kostkou. Necht náhodná veličina X je rovna součtu hodnot všech hodů. Pomocí Čebyševovy nerovnosti odhadněte pravděpodobnost $\Pr[|X - 350| \geq 50]$.

ČEBYŠEV

Připomenutí: Rozptyl náhodné veličiny X je $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$.

Čebyševova nerovnost: X je n.v. (ne nutně nezáporná) a $a \geq 0$.

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq a] \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2},$$

což jste možná na přednášce viděli jako (pro $t \geq 1$)

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t \text{Var}[X]] \leq \frac{1}{t^2} \quad \text{pro } t = \frac{a}{\text{Var}[X]}.$$

Ilustrace Čebyševa. Necht náhodná veličina X má následující rozdělení:

$$X = \begin{cases} -1 & \text{s pravděpodobností } 0,2, \\ 0 & \text{s pravděpodobností } 0,5, \\ 3 & \text{s pravděpodobností } 0,3. \end{cases}$$

- (1) Spočítejte $\mathbb{E}[X]$ a $\text{Var}[X]$.
- (2) Pomocí Čebyševovy nerovnosti odhadněte shora $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 2)$.
- (3) Spočítejte $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq 2]$ přesně z rozdělení a porovnejte s odhadem výše.

GRAFY

- (1) Graf je dvojice (V, E) , kde...
- (a) $E = \binom{V}{2}$
 - (b) $E \subseteq V \times V$
 - (c) $E \subseteq \binom{V}{2}$
- (2) Necht $G = (V, E)$ je graf a $W \subseteq V$ je podmnožina jeho vrcholů. Podgraf *indukovaný* W má množinu vrcholů W a množinu hran F , která je...
- (a) $F \subseteq \binom{V}{2}$
 - (b) $F = \binom{W}{2}$
 - (c) $F = \binom{W}{2} \cap E$
 - (d) $F \subseteq \binom{W}{2} \cap E$

GRAFY

Důležité grafy. Nakreslete K_4, C_5, P_3 a $K_{2,3}$.

Isomorfismus doplňků. Ukažte, že dva grafy jsou isomorfní právě tehdy, když jsou isomorfní jejich doplňky.

Samodoplňkové kružnice. Graf G je *samodoplňkový*, pokud je isomorfní svému doplňku $\overline{G}$. Najděte všechny samodoplňkové kružnice a ukažte, že žádné další neexistují.

Stupně 4 nebo 5. Graf G má 14 vrcholů a 30 hran a každý vrchol je stupně 4 nebo 5. Kolik má vrcholů stupně 5?

Lichý cyklus. Ukažte, že když graf G obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak taky obsahuje lichý cyklus jako indukovaný podgraf. (*Lichý cyklus* je cyklus liché délky.)