

Kvíz

A) Značení $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Napište, kolik je:

- (1) různých funkcí $f : [n] \rightarrow [m]$,
- (2) různých prostých funkcí $f : [n] \rightarrow [m]$,
- (3) různých podmnožin $[n]$,
- (4) různých k -prvkových podmnožin $[n]$.

B) Přiřaďte následující kvantify. *Pozor: nemusí se jednat o funkci ;)*

- | | |
|-------------------------|---|
| (a) n^k | (1) #bijekcí z $[n]$ do $[n]$ |
| (b) $n!$ | (2) # k -tic prvků z $[n]$ |
| (c) $\frac{n!}{(n-k)!}$ | (3) # k -tic navzájem různých prvků z $[n]$ |
| (d) $\binom{n}{k}$ | (4) #funkcí z $[k]$ do $[n]$ |
| (e) 2^n | (5) # k -prvkových podmnožin $[n]$ |
| | (6) #prostých funkcí $[k] \rightarrow [n]$ |
| | (7) #(lineárních) uspořádání n prvků (<i>ne ve smyslu uspořádané množiny</i>) |

C)

- (1) Mějme relaci R na množině X , která je symetrická a tranzitivní a každý prvek $x \in X$ je v relaci s aspoň jedním prvkem. (Poslední vlastnost se dá formálně zapsat jako $|\{(a, b) \in R \mid a = x \vee b = x\}| \geq 1$.) Pak R je také reflexivní.
 - (a) ano
 - (b) ne
- (2) Mějme ekvivalenci $x \sim y \Leftrightarrow x - y \bmod 3 = 0$ na přirozených číslech $\mathbb{N}$. Co je $[23]_{\sim}$, tzn. třída ekvivalence prvku 23?

KOMBINATORICKÉ POČÍTÁNÍ

Prvočíselně vypadající. Řekneme, že číslo je *prvočíselně vypadající*, pokud je složené, ale není dělitelné 2, 3 ani 5. Tři nejmenší prvočíselně vypadající čísla jsou 49, 77 a 91. Víme, že prvočísel menších než 1000 je 168. Kolik je prvočíselně vypadajících čísel menších než 1000? (Vyřešte bez počítače.)

Obdélníky v síti. Kolik je ve čtvercové mřížce $n \times n$ obdélníků, jejichž rohy jsou body mřížky?

Kameny na šachovnici. Kolika způsoby lze umístit osm kamenů na šachovnici 4×4 tak, aby se na šachovnici vyskytovaly čtyři kameny ve stejném řádku nebo stejném sloupci?

Podmnožiny bez sousedů. Kolik je podmnožin $\{1, 2, \dots, n\}$ neobsahujících dvě po sobě jdoucí čísla?

ZÁKLADY PRAVDĚPODOBNOSTI

Připomenutí: V *klasickém* neboli *uniformním* pravděpodobnostním prostoru je pravděpodobnost každého elementárního jevu $\omega \in \Omega$ stejná, totiž $\Pr[\omega] = 1/|\Omega|$. Tedy pravděpodobnost jevu $A \subseteq \Omega$ je $\Pr[A] = |A|/|\Omega|$.

Žárovky. Mějme tři krabice s žárovkami. V první je 10 žárovek, 4 z nich špatné. Ve druhé je 6 žárovek, jedna špatná. Ve třetí je 8 žárovek, 3 z nich špatné. Z náhodně zvolené krabice náhodně vytáhneme žárovku. Jaká je pravděpodobnost, že bude funkční?

Hody kostkami. Vašek hodil třikrát spravedlivou kostkou a součet hodů byl 7.

- Je pravděpodobnější, že mu v prvním hodu padla jednička, nebo dvojka?
- Jaká je pravděpodobnost, že mu v prvním hodu padla dvojka?

Narozeninový problém. Jaká je pravděpodobnost, že dva lidé z dvaceti mají narozeniny ve stejný den?

Narozeninový problém podruhé. Spočítejte pravděpodobnost $p(n)$, že ve skupině n lidí existuje dvojice, která má narozeniny ve stejný den v roce.

PODMÍNĚNÁ PRAVDĚPODOBNOST

Připomenutí: $\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$.

Podmíněná pravděpodobnost. Nechtě jsou A, B jevy v náhodném experimentu s $\Pr[A] = \frac{1}{2}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$ a $\Pr[A|B] = \frac{3}{4}$. Najděte následující:

- (1) $\Pr[A \cap B]$
- (2) $\Pr[A \cup B]$
- (3) $\Pr[B \cup \bar{A}]$
- (4) $\Pr[B|A]$
- (5) Zda jsou A a B nezávislé

ZÁVISLOST JEVŮ

Připomenutí: jevy A a B jsou nezávislé tehdy, když $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$.

(Ne)závislost sudé číslo / nadpoloviční číslo. Mějme vyváženou n -stěnnou kostku, tedy má stěny $\{1, 2, \dots, n\}$ a každá padne s pravděpodobností $1/n$. Mějme následující dva jevy:

- (1) Jev A = padlo sudé číslo
- (2) Jev B = padlo číslo větší než $n/2$.

Jsou jevy A a B závislé nebo nezávislé? Určete pro...

- (1) $n = 6$,
- (2) $n = 8$,
- (3) obecné n .