

Kvíz

A) Značení  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . Napište, kolik je:

- (1) různých funkcí  $f : [n] \rightarrow [m]$ ,
- (2) různých prostých funkcí  $f : [n] \rightarrow [m]$ ,
- (3) různých podmnožin  $[n]$ ,
- (4) různých  $k$ -prvkových podmnožin  $[n]$ .

B) Přiřaďte následující kvantify. *Pozor: nemusí se jednat o funkci ;)*

- |                         |                                                                                   |
|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| (a) $n^k$               | (1) #bijekcí z $[n]$ do $[n]$                                                     |
| (b) $n!$                | (2) # $k$ -tic prvků z $[n]$                                                      |
| (c) $\frac{n!}{(n-k)!}$ | (3) # $k$ -tic navzájem různých prvků z $[n]$                                     |
| (d) $\binom{n}{k}$      | (4) #funkcí z $[k]$ do $[n]$                                                      |
| (e) $2^n$               | (5) # $k$ -prvkových podmnožin $[n]$                                              |
|                         | (6) #prostých funkcí $[k] \rightarrow [n]$                                        |
|                         | (7) #(lineárních) uspořádání $n$ prvků ( <i>ne ve smyslu uspořádané množiny</i> ) |

C)

- (1) Mějme relaci  $R$  na množině  $X$ , která je symetrická a tranzitivní a každý prvek  $x \in X$  je v relaci s aspoň jedním prvkem. (Poslední vlastnost se dá formálně zapsat jako  $|\{(a, b) \in R \mid a = x \vee b = x\}| \geq 1$ .) Pak  $R$  je také reflexivní.
  - (a) ano
  - (b) ne
- (2) Mějme ekvivalenci  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \bmod 3 = 0$  na přirozených číslech  $\mathbb{N}$ . Co je  $[23]_{\sim}$ , tzn. třída ekvivalence prvku 23?

KOMBINATORICKÉ POČÍTÁNÍ

**Kombinační čísla II.** Dokažte následující vztahy početně či kombinatoricky (doporučuji to druhé):

- (1)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .
- (2)  $\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$ .
- (3)  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ .

**Podmnožiny.** Určete počet

- (1) uspořádaných dvojic  $(A, B)$ , kde  $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ .
- (2) uspořádaných čtveřic  $(A, B, C, D)$ , kde  $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  a také  $A \subseteq C \subseteq D$ .

**Kombinační čísla IV.** Zjistěte, čemu se výrazy rovnají; nejlépe to pak vysvětlete kombinatoricky, nikoliv výpočtem :)

- (1)  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$
- (2)  $\sum_{k=1}^n k \cdot (k-1) \binom{n}{k}$

**Definice 1.** Necht  $\pi : [n] \rightarrow [n]$  je permutace. Řekneme, že podmnožina  $S \subseteq [n]$  je *cyklem*  $\pi$  pokud lze prvky  $S$  uspořádat, tzn. napsat  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  tak, že  $x_i = \pi(x_{i-1})$  pro  $i = 2, \dots, k$  a  $x_1 = \pi(x_k)$ . Všimněte si, že permutaci na konečné množině lze rozložit na cykly, tzn. existuje rozklad  $S_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} S_\ell = [n]$  t.ž. pro každé  $j \in [\ell]$ ,  $S_j$  je cyklus  $\pi$ .

**Permutace s jedním cyklem.** Kolik je permutací množiny  $\{1, \dots, n\}$  s právě jedním cyklem? Nezapomeňte zdůvodnit svoji odpověď.

**Konference.** Na konferenci potkal matematik 5 svých dobrých známých. Jelikož program byl bohatý, setkávali se pouze u obědů. Kolik dní trvala konference, pokud:

- s každým jednotlivcem obědval 10 krát
- s každou dvojicí 5 krát
- s každou trojicí 3 krát
- s každou čtveřicí 2 krát
- s celou pětici právě jednou
- vždy obědval alespoň s jedním z těchto pěti kamarádů.

(Pozor: pokud obědval se dvěma známými, započítá se to i do obědů s nimi jako s jednotlivci.)

**Prvočíselně vypadající.** Řekneme, že číslo je *prvočíselně vypadající*, pokud je složené, ale není dělitelné 2, 3 ani 5. Tři nejmenší prvočíselně vypadající čísla jsou 49, 77 a 91. Víme, že prvočísel menších než 1000 je 168. Kolik je prvočíselně vypadajících čísel menších než 1000? (Vyřešte bez počítače.)

**Obdélníky v síti.** Kolik je ve čtvercové mřížce  $n \times n$  obdélníků, jejichž rohy jsou body mřížky?

**Podmnožiny bez sousedů.** Kolik je podmnožin  $\{1, 2, \dots, n\}$  neobsahujících dvě po sobě jdoucí čísla?

**Kameny na šachovnici.** Kolika způsoby lze umístit osm kamenů na šachovnici  $4 \times 4$  tak, aby se na šachovnici vyskytovaly čtyři kameny ve stejném řádku nebo stejném sloupci?