

Kvíz

- (1) Chceme dokázat $(\forall n \in \mathbb{N})A(n)$. Který z následujících způsobů **není** korektní?
 - (a) Dokážeme $A(0), A(1)$ a pro každé n dokážeme tvrzení $A(n) \Rightarrow A(n+2)$.
 - (b) Dokážeme, že $A(n)$ platí pro nekonečně mnoho různých n , a také dokážeme, že pro každé n platí $A(n) \Rightarrow A(n-1)$.
 - (c) Dokážeme, že $A(n)$ platí pro nekonečně mnoho různých n , a také dokážeme, že pro každé n platí $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.
 - (d) Dokážeme $A(0)$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ dokážeme $A(\lfloor n/2 \rfloor) \Rightarrow A(n)$.
- (2) Mějme dvě transitivní relace R a S na X . Pak $R \circ S$ je
 - (a) vždy transitivní.
 - (b) nikdy transitivní.
 - (c) může ale nemusí být transitivní.
- (3) Kolik existuje relací na n -prvkové množině X ?
 - (a) $\binom{n}{2}$
 - (b) n^2
 - (c) 2^{n^2}
 - (d) 2^{2^n}
- (4) Buď $(X, \leq)$ uspořádaná množina. Které z následujících tvrzení **není** pravdivé?
 - (a) Pokud je X konečná, pak existuje alespoň jeden minimální prvek.
 - (b) Nejmenší prvek je vždy zároveň minimálním prvkem.
 - (c) Pokud existuje největší prvek, existuje i nejmenší prvek.
 - (d) Pokud existují alespoň dva minimální prvky, pak neexistuje nejmenší prvek.
- (5) Která z následujících množin **není** podmnožinou množiny 2^X , kde $X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$?
 - (a) $\emptyset$
 - (b) $\{1, 2\}$
 - (c) $\{\{\{1, 2\}, \emptyset\}, \{\{1, 2\}\}\}$
 - (d) 2^Y pro $Y = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$

RELACE, USPOŘÁDÁNÍ, FUNKCE

Součin uspořádání. Jedna lednička je evidentně lepší než druhá, pokud dosahuje současně nižší teploty a nižší spotřeby elektřiny. Obecněji: mějme (částečná) uspořádání $\leq_X$ na X a $\leq_Y$ na Y . Definujme relaxi $\preceq$ na $X \times Y$ takto:

$$(x, y) \preceq (x', y') \equiv (x \leq_X x') \wedge (y \leq_Y y') .$$

Dokažte, že tato relace je také uspořádání. Kdy je lineární?

Bijekce $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

- (1) Najděte bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$,
- (2) Najděte bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$. (Může pomoci si nejprve rozmyslet bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^2$.)

Skládání funkcí.

- (1) Jsou-li f, g prosté, je $f \circ g$ také prostá?
- (2) Jsou-li f, g funkce na, je $f \circ g$ také na?
- (3) Je-li f prostá a g libovolná, je $f \circ g$ nebo $g \circ f$ také prostá?
- (4) Je-li f na a g libovolná, je $f \circ g$ nebo $g \circ f$ také na?
- (5) Je-li $f \circ g$ prostá, musí být f nebo g prostá?
- (6) Je-li $f \circ g$ na, musí být f nebo g na?
- (7) Každá funkce f se dá zapsat jako $g \circ h$, kde g je na a h je prostá. Ano nebo ne?

KOMBINATORICKÉ POČÍTÁNÍ

k -prvkové permutace. Necht $P(n, k)$ je počet permutací k prvků z n -prvkové množiny. Jinými slovy, $P(n, k)$ je počet způsobů, jak lineárně uspořádat k z n prvků. Kombinatoricky dokažte:

- (1) $P(n, k) = \binom{n}{k} k!$.
- (2) $P(n, k) = P(n-1, k) + kP(n-1, k-1)$.

Podmnožiny. Určete počet

- (1) uspořádaných dvojic (A, B) , kde $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.
- (2) uspořádaných čtveřic (A, B, C, D) , kde $A \subseteq B \subseteq D \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ a také $A \subseteq C \subseteq D$.

Kombinační čísla II. Dokažte následující vztahy početně či kombinatoricky (doporučuji to druhé):

- (1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- (2) $\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$.
- (3) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Kombinační čísla IV. Zjistěte, čemu se výrazy rovnají; nejlépe to pak vysvětlete kombinatoricky, nikoliv výpočtem :)

- (1) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$
- (2) $\sum_{k=1}^n k \cdot (k-1) \binom{n}{k}$