

Kvíz

- (1) Mějme ekvivalenci R na množině X . Necht $[x]_R$ označuje třídu ekvivalence určenou prvkem x . Které z následujících tvrzení **není** obecně pravdivé?
 - (a) $(\forall x \in X)[x]_R \neq \emptyset$
 - (b) $\bigcup_{x \in X} [x]_R = X$
 - (c) $(\forall x, y \in X)[| [x]_R | = | [y]_R |]$
 - (d) $(\forall x, y \in X)([x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \Rightarrow [x]_R = [y]_R)$
- (2) Mějme uspořádanou množinu $(X, \preceq)$ s nejmenším prvkem. Necht $Y \subseteq X$ je neprázdná. Má uspořádaná množina $(Y, \preceq_Y)$, kde $\preceq_Y = \preceq \cap (Y \times Y)$ také nejmenší prvek?
 - (a) Vždy ano.
 - (b) Nikdy ne.
 - (c) Může, ale nemusí mít.

RELACE A FUNKCE

Symetrická i antisymetrická. Najděte relaci na $\{1, 2, 3, 4\}$, která je současně symetrická i antisymetrická.

Ani symetrická, ani antisymetrická. Najděte relaci na $\{1, 2, 3, 4\}$, která není ani symetrická, ani antisymetrická.

Ekvivalenční třídy. U následující relace nahlédněte, že je to ekvivalence, a popište její ekvivalenční třídy:

- Pro $A, B \subseteq \{1, \dots, n\}$: existuje bijekce mezi A a B .

Definice 1 (Lineární uspořádání). Řekneme, že uspořádání $\preceq$ na množině X je *lineární*, pokud pro každé $a, b \in X$ platí buď $a \preceq b$ nebo $b \preceq a$.

Relace dělitelnosti. Uvažujme relaci $x \mid y$ (x je dělitelem y) na množině $\{1, \dots, n\}$.

- (1) Dokažte, že je to uspořádání. Je lineární?
- (2) Nakreslete Hasseův diagram (třeba pro $n = 13$).
- (3) Jak vypadají nejmenší, největší, minimální a maximální prvky? (vyznačte je)
- (4) Jak se odpovědi na předchozí otázky změní odebráním prvku 1?
- (5) Jaký je největší antiřetězec?

Uspořádání na objednávku. Sestrojte uspořádání s následujícími vlastnostmi:

- (1) žádný minimální ani maximální prvek
- (2) žádný největší, ale aspoň 1 maximální
- (3) žádný největší, ale právě 1 maximální
- (4) nekonečně mnoho minimálních prvků a 1 maximální

Skládání funkcí.

- (1) Jsou-li f, g prosté, je $f \circ g$ také prostá?
- (2) Jsou-li f, g funkce na, je $f \circ g$ také na?
- (3) Je-li f prostá a g libovolná, je $f \circ g$ nebo $g \circ f$ také prostá?
- (4) Je-li f na a g libovolná, je $f \circ g$ nebo $g \circ f$ také na?
- (5) Je-li $f \circ g$ prostá, musí být f nebo g prostá?
- (6) Je-li $f \circ g$ na, musí být f nebo g na?
- (7) Každá funkce f se dá zapsat jako $g \circ h$, kde g je na a h je prostá. Ano nebo ne?

VNOŘENÍ

Vnoření jedné uspořádané množiny $(X, \leq)$ do jiné uspořádané množiny $(Y, \preceq)$ je prosté zobrazení $f : X \rightarrow Y$ takové, že $\forall x, x' \in X : x \leq x' \Leftrightarrow f(x) \preceq f(x')$

Bijekce $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

- (1) Najděte bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$,
- (2) Najděte bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$. (Může pomoci si nejprve rozmyslet bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^2$.)

BONUS

Vlastnosti relací. Dokažte, že pro relaci R na množině X platí:

- (1) R je reflexivní $\Leftrightarrow \Delta_X \subseteq R$, kde $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$.
- (2) R je symetrická $\Leftrightarrow R = R^{-1}$.
- (3) R je antisymetrická $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_X$.

Součin uspořádání. Jedna lednička je evidentně lepší než druhá, pokud dosahuje současně nižší teploty a nižší spotřeby elektřiny. Obecněji: mějme (částečná) uspořádání $\leq_X$ na X a $\leq_Y$ na Y . Definujme relaci $\preceq$ na $X \times Y$ takto:

$$(x, y) \preceq (x', y') \equiv (x \leq_X x') \wedge (y \leq_Y y') .$$

Dokažte, že tato relace je také uspořádání. Kdy je lineární?