

Kvíz

- (1) Mějme konečné množiny X, Y, Z . Označme $x = |X|$, $y = |Y|$ a $z = |Z|$. Kolik prvků má kartézský součin $X \times Y \times Z$?
 - (a) xyz
 - (b) 2^{x+y+z}
 - (c) $\max(x, y, z)$
- (2) Mějme relaci R mezi X a Y a relaci S mezi Y a Z . Jak definujeme složení $R \circ S$?
 - (a) $\{(x, z) \in X \times Z \mid (\exists y \in Y)((x, y) \in R \vee (y, z) \in S)\}$
 - (b) $\{(x, z) \in X \times Z \mid (\exists y \in Y)((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S)\}$
- (3) Mějme ekvivalenci R na množině X . Necht $[x]_R$ označuje třídu ekvivalence určenou prvkem x . Které z následujících tvrzení **není** obecně pravdivé?
 - (a) $(\forall x \in X)[x]_R \neq \emptyset$
 - (b) $\bigcup_{x \in X} [x]_R = X$
 - (c) $(\forall x, y \in X)[x]_R = [y]_R$
 - (d) $(\forall x, y \in X)([x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset) \Rightarrow [x]_R = [y]_R$
- (4) Mějme libovolnou množinu X . Relace $\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$ je:
 - (a) Uspořádáním i ekvivalencí zároveň.
 - (b) Pouze uspořádáním.
 - (c) Pouze ekvivalencí.
 - (d) Ani jedním.

RELACE

Rodinné vztahy. Uvažme univerzum všech lidí a definujme na něm relace O, M, B :

$$xOy \equiv x \text{ je otcem } y$$

$$xMy \equiv x \text{ je matkou } y$$

$$xB y \equiv x \text{ je bratrem } y$$

Jak pomocí operací nad relacemi vyjádříme relace „ x je rodičem y “, „ x je dítětem y “ a „ x je strýcem y “?

Ověření vlastností relace. Rozhodněte, které z následujících relací jsou reflexivní, symetrické, tranzitivní a slabě antisymetrické.

- (1) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c)\}$,
- (2) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (c, c)\}$,
- (3) $(X, R) = (\mathbb{N}, \leq)$,
- (4) $X = \{1, 2, \dots, 10\}$, $R = \{(x, y) \mid nsd(x, y) = 1\}$, kde nsd je nejmenší společný násobek, tzn. $nsd(x, y) = 1$ právě když x, y jsou nesoudělná.

Uzavřenost reflexivity. Necht jsou R a S reflexivní relace na téže množině. Určete, které z následujících relací jsou také reflexivní – zdůvodněte, proč jsou reflexivní nebo nalezněte protipříklad.

- (1) $R \cup S$
- (2) $R \cap S$
- (3) $R \setminus S$
- (4) R^{-1}

Relace R^{-1} je inverzní relace k R a $(y, x) \in R^{-1}$ právě tehdy, když $(x, y) \in R$.

Transitivita. Necht R a S jsou tranzitivní relace na množině X . Budou následující relace také tranzitivní?

- (1) $R \cup S$
- (2) $R \cap S$
- (3) $R \setminus S$
- (4) $R \triangle S$ (operace XOR)
- (5) $R \circ S$
- (6) $R^{-1} \circ S^{-1}$
- (7) R^{-1}

Skládání relací. Jak vypadá relace $R \circ R$, označuje-li R :

- (1) relaci rovnosti na množině $\mathbb{N}$,
- (2) relaci $\leq$ na $\mathbb{N}$,
- (3) relaci $<$ na $\mathbb{N}$,
- (4) relaci $<$ na $\mathbb{R}$.

Hint: rozmyslete si, jak vypadá $R \circ R$. Hodí se k tomu šipkový diagram.

Skládání a tranzitivita. Dokažte, že R je tranzitivní právě tehdy, když $R \circ R \subseteq R$.

Falešné skládání. Nechtě R a S jsou relace na množině X a platí, že

$$\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xSz.$$

Nalezněte protipříklad na tvrzení: R je tranzitivní právě tehdy když $S \subseteq R$.

MATEMATICKÁ INDUKCE (BONUS)

Vážené mocniny dvojky. Uhodněte nebo odvoďte vzoreček pro

$$\sum_{i=0}^n i2^i$$

a dokažte jeho správnost indukcí.