12. cvičení

Podmíněná pravděpodobnost

Připomenutí: $\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A\cap B]}{\Pr[B]}$.

Podmíněná pravděpodobnost. Nechť jsou A, B jevy v náhodném experimentu s $\Pr[A] = \frac{1}{2}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$ a $\Pr[A|B] = \frac{3}{4}$. Najděte následující:

(1) $\Pr[A \cap B]$
(2) $\Pr[A \cup B]$
(3) $\Pr[B \cup \bar{A}]$
(4) $\Pr[B|A]$
(5) Zda jsou A a B nezávislé

Závislost jevů

Připomenutí: jevy A a B jsou nezávislé tehdy, když $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$.

(Ne)závislost sudé číslo / nadpoloviční číslo. Mějme vyváženou n-stěnnou kostku, tedy má stěny $\{1, 2, \ldots, n\}$ a každá padne s pravděpodobností $1/n$. Mějme následující dva jevy:

(1) Jev A = padlo sudé číslo
(2) Jev B = padlo číslo větší než $n/2$.

Jsou jevy A a B závislé nebo nezávislé? Určete pro...

(1) $n = 6$,
(2) $n = 8$,
(3) obecné n.

Střední hodnota

Náhodná veličina je funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$. (Příklad: házeme dvěma kostkami, jevy jsou dvojice čísel – co padlo na první a druhé kostce; náhodná veličina je např. součet nebo součin čísel, které padly.)
Střední hodnota náhodné veličiny X, značíme $\mathbb{E}[X]$, je definována jako $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega\in\Omega} \Pr[\omega] \cdot X(\omega)$. Intuitivně je to tedy průměr hodnot náhodné veličiny X přes elementární jevy $\omega \in \Omega$, který je vážený a váhy jsou pravděpodobnosti elementárních jevů (tedy $\Pr[\omega]$)

Dvě kostky. Máme dvě standardní šestistěnné kostky. Náhodná veličina X je součet hodů a náhodná veličina Y je součin hodů. Určete $\mathbb{E}[X]$ a $\mathbb{E}[Y]$.

Důležitá vlastnost střední hodnoty je její *linearita*: pro skalár $\alpha \in \mathbb{R}$ a dvě náhodné veličiny X, Y platí, že $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ a $\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha\mathbb{E}[X]$. (Plyne to snadno z definice.)
Metoda indikátorů je oblíbený trik, který používá právě linearitu střední hodnoty. Mějme jev $A \subseteq \Omega$. Na jeho základě můžeme definovat *indikátorovou náhodnou veličinu* I_A (krátce "indikátor"), což je funkce, která je 1 pokud jev A nastal a 0 pokud nenastal. Např. $A = \{2, 4, 6\}$ "padlo sudé číslo", $I_A(2) = I_A(4) = I_A(6) = 1$, ale $I_A(1) = I_A(3) = I_A(5) = 0$. Hezká vlastnost indikátorů je, že platí $\mathbb{E}[I_A] = \Pr[A]$, tedy např. $\Pr[A] = 1/2$ (pro šestistěnnou kostku) a snadno se ověří, že $\mathbb{E}[I_A] = 1/2$. Konečně tedy co je metoda indikátorů – často chceme zkoumat náhodnou veličinu X, kterou lze zformulovat jako součet nějakých indikátorů $I_1, I_2, \ldots, I_k$, tedy $X = I_1 + I_2 + \cdots + I_k$. (Pozor, $X, I_1, \ldots, I_k$ jsou všechno *funkce*, to se často plete.) Je-li snadné určit $\Pr[I_j]$ a tedy i $\mathbb{E}[I_j]$, tak je snadné určit i $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[I_1 + \cdots + I_k] = \mathbb{E}[I_1] + \cdots + \mathbb{E}[I_k] = \Pr[I_1] + \cdots + \Pr[I_k]$.

S pomocí metody indikátorů vyřešte následující úlohu:

Problém čínského stolu. V čínských restauracích mají často velké kulaté otočné stoly. Je to proto, aby si každý mohl objednat vlastní jídlo, ale zároveň ochutnávat od ostatních pomocí otáčení stolu a ne výměnou talířů. Představme si n přátel, kteří se rozhodli navštívit takovýto podnik. Usedli tedy k velkému otočnému stolu s n místy a každý si objednal jiné jídlo. Číšník pak před každého položil jeho jídlo, ale jelikož byl zlomyslný, tak stůl roztočil. Jaká je pravděpodobnost, že před každým skončí právě jeho jídlo? Spočítejte střední hodnotu počtu přátel, před kterými skončí jejich jídlo. Uvažujte, že každé natočení je stejně pravděpodobné.

Počet jedniček. Mějme pravděpodobností prostor $\mathcal{C}_n$ všech posloupností 0 a 1 délky n. Každá posloupnost má pravděpodobnost $1/2^n$. Spočítejte střední hodnotu počtu 1 v náhodně vybrané posloupnosti.

Zajíci. Každý z n lovců zamíří na jednoho náhodně vybraného z n zajíců. Všichni myslivci naráz vystřelí a trefí zajíce, na kterého mířili. Náhodná veličina Z určuje počet přeživších zajíců. Spočítejte střední hodnotu Z.

První jednička. Mějme následující experiment: Házíme férovou mincí tak dlouho, dokud nepadne první hlava. Zkonstruujte pravděpodobnostní prostor, který je modelem tohoto experimentu, a určete střední hodnotu počtu hodů.