11. cvičení

Základy pravděpodobnosti

Připomenutí: V *klasickém* neboli *uniformním* pravděpodobnostním prostoru je pravděpodobnost každého elementárního jevu $\omega \in \Omega$ stejná, totiž $\Pr[\omega] = 1/|\Omega|$. Tedy pravděpodobnost jevu $A \subseteq \Omega$ je $\Pr[A] = |A|/|\Omega|$.

Žárovky. Mějme tři krabice s žárovkami. V první je 10 žárovek, 4 z nich špatné. Ve druhé je 6 žárovek, jedna špatná. Ve třetí je 8 žárovek, 3 z nich špatné. Z náhodně zvolené krabice náhodně vytáhneme žárovku. Jaká je pravděpodobnost, že bude funkční?

Hody kostkami. Vašek hodil třikrát spravedlivou kostkou a součet hodů byl 7.

- Je pravděpodobnější, že mu v prvním hodu padla jednička, nebo dvojka?
- Jaká je pravděpodobnost, že mu v prvním hodu padla dvojka?

Narozeninový problém. Jaká je pravděpodobnost, že dva lidé z dvaceti mají narozeniny ve stejný den?

Trojúhelník v náhodném grafu. Dokažte, že náhodný graf skoro jistě (tzn. s pravděpodobností jdoucí k 1 pro rostoucí n) obsahuje trojúhelník.
Hint: úloha se dá vyřešit více způsoby, ale skoro určitě se vám bude hodit tzv. "union bound", totiž tvrzení že pokud máme jev A a jevy $A_1, \ldots, A_k$ a $A = \bigcup_i A_i$ (pozor, nemusí to být disjunktní sjednocení), pak $\Pr[A] \leq \sum_i \Pr[A_i]$.

Narozeninový problém. Spočítejte pravděpodobnost $p(n)$, že ve skupině n lidí existuje dvojice, která má narozeniny ve stejný den v roce.

Podmíněná pravděpodobnost

Připomenutí: $\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A\cap B]}{\Pr[B]}$.

Podmníněná pravděpodobnost. Nechť jsou A, B jevy v náhodném experimentu s $\Pr[A] = \frac{1}{2}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$ a $\Pr[A|B] = \frac{3}{4}$. Najděte následující:

(1) $\Pr[A \cap B]$
(2) $\Pr[A \cup B]$
(3) $\Pr[B \cup \bar{A}]$
(4) $\Pr[B|A]$
(5) Zda jsou A a B nezávislé

Závislost jevů

Připomenutí: jevy A a B jsou nezávislé tehdy, když $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$.

(Ne)závislost sudé číslo / nadpoloviční číslo. Mějme vyváženou n-stěnnou kostku, tedy má stěny $\{1, 2, \ldots, n\}$ a každá padne s pravděpodobností $1/n$. Mějme následující dva jevy:

(1) Jev $A =$ padlo sudé číslo
(2) Jev $B =$ padlo číslo větší než $n/2$.

Jsou jevy A a B závislé nebo nezávislé? Určete pro…

(1) $n = 6$,
(2) $n = 8$,
(3) obecné n.

Střední hodnota

Problém čínského stolu. V čínských restauracích mají často velké kulaté otočné stoly. Je to proto, aby si každý mohl objednat vlastní jídlo, ale zároveň ochutnávat od ostatních pomocí otáčení stolu a ne výměnou talířů. Představme si n přátel, kteří se rozhodli navštívit takovýto podnik. Usedli tedy k velkému otočnému stolu s n místy a každý si objednal jiné jídlo. Číšník pak před každého položil jeho jídlo, ale jelikož byl zlomyslný, tak stůl roztočil. Jaká je pravděpodobnost, že před každým skončí právě jeho jídlo? Spočítejte střední hodnotu počtu přátel, před kterými skončí jejich jídlo. Uvažujte, že každé natočení je stejně pravděpodobné.

Stromky. Zahradnická firma sází po městě stromky; víme, že průměrně 90% z nich přežije. Jaká je pravděpodobnost, že z následujících 13 zasazených stromů, jich:

(1) Přežije nejvýše 10?
(2) Přežije alespoň 10?
(3) Přežije přesně 10?

Počet jedniček. Mějme pravděpodobností prostor $\mathcal{C}_n$ všech posloupností 0 a 1 délky n. Každá posloupnost má pravděpodobnost $1/2^n$. Spočítejte střední hodnotu počtu 1 v náhodně vybrané posloupnosti.

Zajíci. Každý z n lovců zamíří na jednoho náhodně vybraného z n zajíců. Všichni myslivci naráz vystřelí a trefí zajíce, na kterého mířili. Náhodná veličina Z určuje počet přeživších zajíců. Spočítejte střední hodnotu Z.

První jednička. Mějme následující experiment: Házíme férovou mincí tak dlouho, dokud nepadne první hlava. Zkonstruujte pravděpodobnostní prostor, který je modelem tohoto experimentu, a určete střední hodnotu počtu hodů.