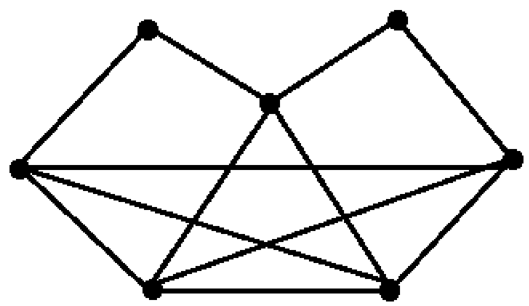
9. cvičení

Jedním tahem. Nakreslete graf jedním tahem:

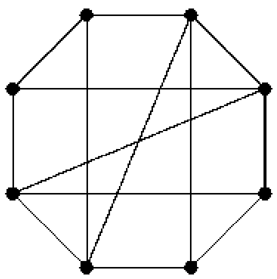


Pokud se vám to nedaří (ale i pokud ano), zkuste si vzpomenout, jak by se na to šlo podle důkazu Eulerovy věty z přednášky.

Bipartitní grafy. Ukažte, že graf je bipartitní právě tehdy, neobsahuje-li kružnici liché délky.

Rovinná nakreslení

Je rovinný? Rozhodněte, zda je následující graf rovinný.



K_5 a $K_{3,3}$. Dokažte, že K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné.
Hint: použijte horní odhad na počet hran rovinného grafu.

Rovinný 5-regulární. Najděte rovinný graf, jehož každý vrchol má stupeň 5.

Nejednoznačnost duálu. Najděte dvě nakreslení téhož grafu, jejichž duály nejsou isomorfní.

Petersen. Dokažte nerovinnost Petersenova grafu (bude na začátku nakreslen).

Doplněk rovinného grafu. Dokažte, že je-li G rovinný graf na alespoň 11 vrcholech, pak jeho doplněk $\overline{G}$ nemůže být rovinný.

Platónská tělesa. Nakreslete grafy všech pěti pravidelných mnohostěnů. Nahlédněte, že jsou rovinné. Jak vypadají jejich duály?
Asi jste si všimli, že graf platónského tělesa je souvislý, rovinný a k-regulární s takovým rovinným nakreslením, že všechny stěny mají délku ℓ (pro nějaké $k, \ell \in \mathbb{N}$). Označme $n = |V(G)|$. Postupně dokažte:

(1) Platí $n(2k + 2\ell + k\ell) = 4\ell$.
(2) Jediné možnosti pro (k, ℓ) jsou $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$.

Nejvíc stěn. Jaký je maximálně počet vnitřních stěn rovinného grafu na n vrcholech?

Kubický rovinný určený stěnami. Graf je *kubický* když je 3-regulární, tzn. když stupeň každého vrcholu je přesně 3. Rozhodněte, zda existuje kubický rovinný graf s

(1) právě 12 šestiúhelníkovými stěnami (a žádnými dalšími)?
(2) právě 12 pětiúhelníkovými stěnami (a žádnými dalšími)?
(3) jednou dvacetiúhelníkovou stěnou a deseti pětiúhelníkovými (a žádnými dalšími)?