

STROMY

Alespoň dva listy. Dokažte, že každý strom na alespoň dvou vrcholech obsahuje alespoň dva listy. (Na přednášce se ukázalo, že má alespoň jeden list.)

Kořatý stromy. Dokažte, že obsahuje-li strom vrchol stupně k , pak v něm je alespoň k listů

Kostra. Definujme kostru grafu jako podgraf, který obsahuje všechny vrcholy a je to strom. Dokažte, že každý souvislý graf má kostru.

Pořadí vrcholů. Ukažte, že pro každý strom s n vrcholy existuje pořadí vrcholů $\{v_1, \dots, v_n\}$ takové, že v_i má právě jednoho souseda v množině $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$, pro každé $i = 1, \dots, n - 1$.

Skóre stromu. Mějme posloupnost přirozených čísel $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ t.ž. $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ a $d_i \geq 1$ pro každé i . Dokažte, že existuje strom takový, že (d_1, \dots, d_n) je jeho skóre, tzn. d_i je stupeň vrcholu v_i .

Nezávislá ve stromu. Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. (Nezávislá množina je množina vrcholů, mezi nimiž nejsou žádné hrany.)

Mocniny A . Necht G je graf a A je jeho matice sousednosti, tzn. $A_{uv} = 1$ pokud $uv \in E$, jinak $A_{uv} = 0$. Popište, co je A_{uv}^k , kde A^k je k -tá mocnina A . *Hint:* Nějak to souvisí se sledy délky k ...

Diagonála A^3 . Jaké prvky jsou na hlavní diagonále A^3 , tj. třetí mocniny A ?