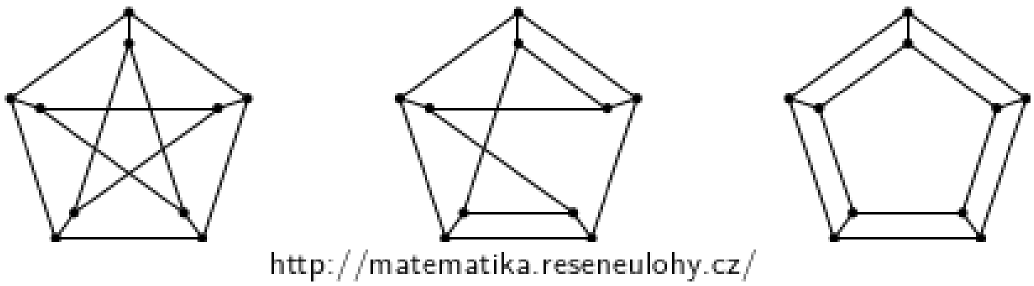
7. cvičení

Bipartitní podgraf. Dokažte, že každý graf s m hranami obsahuje bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami.

Dokažte, že následující grafy nejsou isomorfní:



Orientované eulerovské grafy. Nechť G je orientovaný graf, tzn. $E \subseteq V \times V$ (hrany jsou šipky). G je *silně souvislý*, pokud pro každé dva vrcholy u, v existuje orientovaná cesta jak z u do v, tak z v do u, a je *slabě souvislý* pokud je G souvislý, když zapomeneme orientace hran (formálně: pokud je souvislý jeho *podkladový graf* $G' = (V(G), \{uv \mid (u,v) \in E(G), (v,u) \in E(G)\})$). Dále $d^+(v)$ značí počet hran přicházejících do v a $d^-(v)$ počet hran odcházejících z v a říká se jim vstupní a výstupní stupeň, či anglicky indegree a outdegree.
Dokažte, že (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) (což nakonec dá ekvivalenci všech výroků).

(1) G má uzavřený eulerovský tah,
(2) G je silně souvislý a $\forall v \in V : d^+(v) = d^-(v)$,
(3) G je slabě souvislý a $\forall v \in V : d^+(v) = d^-(v)$.

Rozklad na kružnice. Dokažte, že hrany každého eulerovského grafu lze rozložit na sjednocení kružnic, tzn. v G existuje k kružnic s množinami hran $E_1, E_2, \ldots, E_k$ t.ž. $E = E_1 \dot\cup E_2 \dot\cup \cdots \dot\cup E_k$ ("$\dot\cup$" značí *disjunktní sjednocení*, tzn. každá hrana leží v právě jedné E_i).

Cracking kódu. Garáž se odemyká 0/1 kódem délky 8, ale dozvěděli jste se o bezpečnostní díře, totiž že není nutné se zadáváním pokaždé začínat odznovu. Například, je-li kód 01010101, tak dveře odemkne zadání jakékoliv posloupnosti, která končí správným kódem, třeba 11010*01010101*. Najděte způsob, jak zkonstruovat co nejkratší posloupnost 0/1, která obsahuje jako (souvislou) podposloupnost každou 0/1 posloupnost délky 8 (tzn. každý potenciální odemykací kód).
Zobecněte svůj postup pro libovolné n, tedy najděte co nejkratší 0/1 posloupnost, která jako (souvislou) podposloupnost obsahuje každou 0/1 posloupnost délky n. Jak dlouhá je vaše posloupnost, tedy jaký je váš horní odhad na tu nejlepší hodnotu? Jak dlouhá musí být jakákoliv taková posloupnost, tedy jaký je váš dolní odhad na tu nejlepší hodnotu?

Kolik tahů? Kolika nejméně (otevřenými a uzavřenými) tahy lze nakreslit jakýkoliv souvislý graf? (Neboli: na kolik nejméně tahů lze rozložit jeho množinu hran?)

Definice 1. *Line graf H* grafu G je graf, jehož vrcholy představují hrany G a dvě hrany G tvoří hranu H právě pokud jsou incidentní (v nějakém vrcholu G). Jinými slovy H představuje relaci incidence na hranách G.

Eulerovskost line grafu. Dokažte, že line graf eulerovského grafu je eulerovský.

Mocniny A. Nechť G je graf a A je jeho matice sousednosti, tzn. $A_{uv} = 1$ pokud $uv \in E$, jinak $A_{uv} = 0$. Popište, co je A^k_{uv}, kde A^k je k-tá mocnina A. *Hint:* Nějak to souvisí se sledy délky k…

Diagonála A^3. Jaké prvky jsou na hlavní diagonále A^3, tj. třetí mocniny A?