

### Kvíz

- (1) Graf je dvojice  $(V, E)$ , kde...
  - (a)  $E = \binom{V}{2}$
  - (b)  $E \subseteq V \times V$
  - (c)  $E \subseteq \binom{V}{2}$
- (2) Necht  $G = (V, E)$  je graf a  $W \subseteq V$  je podmnožina jeho vrcholů. Podgraf *indukovaný*  $W$  má množinu vrcholů  $W$  a množinu hran  $F$ , která je...
  - (a)  $F \subseteq \binom{V}{2}$
  - (b)  $F = \binom{W}{2}$
  - (c)  $F = \binom{W}{2} \cap E$
  - (d)  $F \subseteq \binom{W}{2} \cap E$

### GRAFY

**Důležité grafy.** Nakreslete  $K_4, C_5, P_3$  a  $K_{2,3}$ .

**Isomorfismus doplňků.** Ukažte, že dva grafy jsou isomorfní právě tehdy, když jsou isomorfní jejich doplňky.

**Samodoplňkové kružnice.** Graf  $G$  je samodoplňkový, pokud je isomorfní svému doplňku  $\overline{G}$ . Najděte všechny samodoplňkové kružnice a ukažte, že žádné další neexistují.

**Stupně 4 nebo 5.** Graf  $G$  má 14 vrcholů a 30 hran a každý vrchol je stupně 4 nebo 5. Kolik má vrcholů stupně 5?

**Lichý cyklus.** Ukažte, že když graf  $G$  obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak taky obsahuje lichý cyklus jako indukovaný podgraf. (*Lichý cyklus* je cyklus liché délky.)

**Doplňěk bipartitního.** Existuje bipartitní graf s alespoň 5 vrcholy, jehož doplněk je taky bipartitní?

**Různé stupně.** Existuje graf, jehož všechny vrcholy by měly různé stupně?

**Definice 1.** *Automorfismus grafu*  $G$  je bijekce  $f : V(G) \rightarrow V(G)$ , které je isomorfismem, tzn.  $\forall \{u, v\} \subseteq \binom{V}{2} : uv \in E(G) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(G)$ .

**Grafy s  $n$  automorfismy.** Pro každé přirozené číslo  $n$  sestrojte graf, který má přesně  $n$  automorfizmů. (Hint: orientovaný graf s  $n$  automorfizmy se najde snadno, pak je potřeba orientaci něčím nahradit ;-))

*Příklad.* Najděte příklad asymetrického grafu (s aspoň 2 vrcholy).

*Malý není.* Dokažte, že neexistuje žádný asymetrický graf  $G$  s  $1 < |V(G)| \leq 5$ .

$n!$ . Dokažte, že graf  $G$  s  $n$  vrcholy je asymetrický, právě když na množině  $V(G)$  existuje  $n!$  různých grafů isomorfních  $G$ .