5. cvičení

Kvíz

A) Značení $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Napište, kolik je:

(1) různých funkcí $f : [n] \to [m]$,
(2) různých prostých funkcí $f : [n] \to [m]$,
(3) různých podmnožin $[n]$,
(4) různých k-prvkových podmnožin $[n]$.

B) Přiřaďte následující kvantity. *Pozor:* nemusí se jednat o funkci ;)

(a) n^k	**(1)** #bijekcí z $[n]$ do $[n]$
(b) $n!$	**(2)** #k-tic prvků z $[n]$
(c) $\frac{n!}{(n-k)!}$	**(3)** #k-tic navzájem různých prvků z $[n]$
(d) $\binom{n}{k}$	**(4)** #funkcí z $[k]$ do $[n]$
(e) 2^n	**(5)** #k-prvkových podmnožin $[n]$
	(6) #prostých funkcí $[k] \to [n]$
	(7) #(lineárních) uspořádání n prvků (*ne ve smyslu uspořádané množiny*)

C)

(1) Mějme relaci R na množině X, která je symetrická a tranzitivní a každý prvek $x \in X$ je v relaci s aspoň jedním prvkem. (Poslední vlastnost se dá formálně zapsat jako $|\{(a, b) \in R \mid a = x \vee b = x\}| \geq 1$.) Pak R je také reflexivní.
  (a) ano
  (b) ne
(2) Mějme ekvivalenci $x \sim y \Leftrightarrow x - y \mod 3 = 0$ na přirozených číslech $\mathbb{N}$. Co je $[23]_\sim$, tzn. třída ekvivalence prvku 23?

Kombinatorika

Kombinační čísla IV. Zjistěte, čemu se výrazy rovnají; nejlépe to pak vysvětlete kombinatoricky, nikoliv výpočtem :)

(1) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
(2) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k-1)\binom{n}{k}$

Definice 1. Nechť $\pi : [n] \to [n]$ je permutace. Řekneme, že podmnožina $S \subseteq [n]$ je *cyklem* π pokud lze prkvy S uspořádat, tzn. napsat $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ tak, že $x_i = \pi(x_{i-1})$ pro $i = 2, \ldots, k$ a $x_1 = \pi(x_k)$. Všimněte si, že permutaci na konečné množině lze rozložit na cykly, tzn. existuje rozklad $S_1 \dot\cup \ldots \dot\cup S_\ell = [n]$ t.ž. pro každé $j \in [\ell]$, S_j je cyklus π.

Permutace s jedním cyklem. Kolik je permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$ s právě jedním cyklem? Nezapomeňte zdůvodnit svoji odpověď.

Konference. Na konferenci potkal matematik 5 svých dobrých známých. Jelikož program byl bohatý, setkávali se pouze u obědů. Kolik dní trvala konference, pokud:

- s každým jednotlivcem obědval 10 krát
- s každou dvojicí 5 krát
- s každou trojicí 3 krát
- s každou čtveřicí 2 krát
- s celou pěticí právě jednou
- vždy obědval alespoň s jedním z těchto pěti kamarádů.

(Pozor: pokud obědval se dvěma známými, započítá se to i do obědů s nimi jako s jednotlivci.)

Prvočíselně vypadající. Řekneme, že číslo je *prvočíselně vypadající*, pokud je složené, ale není dělitelné 2, 3 ani 5. Tři nejmenší prvočíselně vypadající čísla jsou 49, 77 a 91. Víme, že prvočísel menších než 1000 je 168. Kolik je prvočíselně vypadajících čísel menších než 1000? (Vyřešte bez počítače.)

Obdélníky v síti. Kolik je ve čtvercové mřížce $n \times n$ obdélníků, jejichž rohy jsou body mřížky?

Podmnožiny bez sousedů. Kolik je podmnožin $\{1, 2, \ldots, n\}$ neobsahujících dvě po sobě jdoucí čísla?

Kameny na šachovnici. Kolika způsoby lze umístit osm kamenů na šachovnici 4×4 tak, aby se na šachovnici vyskytovaly čtyři kameny ve stejném řádku nebo stejném sloupci?

Dělitelnost faktoriálu.

(1) Ukažte, že $k!$ dělí součin každých k po sobě jdoucích (přirozených) čísel. *Hint: zamyslete se nad správně zvoleným kombinačním číslem…*

(2) Ukažte s pomocí předchozího tvrzení, že $(k!)^n$ dělí $(kn)!$.