4. cvičení

Kvíz

(1) Mějme libovolnou množinu X. Relace $\Delta_X := \{(x,x) \mid x \in X\}$ je:
  (a) Uspořádáním i ekvivalencí zároveň.
  (b) Pouze uspořádáním.
  (c) Pouze ekvivalencí.
  (d) Ani jedním.

(2) Mějme uspořádanou množinu $(X, \preceq)$ s nejmenším prkvem. Nechť $Y \subseteq X$ je neprázdná. Má uspořádaná množina $(Y, \preceq_Y)$, kde $\preceq_Y = \preceq \cap (Y \times Y)$ také nejmenší prvek?
  (a) Vždy ano.
  (b) Nikdy ne.
  (c) Může, ale nemusí mít.

(3) Chceme dokázat $(\forall n \in \mathbb{N})A(n)$. Který z následujících způsobů **není** korektní?
  (a) Dokážeme $A(0), A(1)$ a pro každé n dokážeme tvrzení $A(n) \Rightarrow A(n+2)$.
  (b) Dokážeme, že $A(n)$ platí pro nekonečně mnoho různých n, a také dokážeme, že pro každé n platí $A(n) \Rightarrow A(n-1)$.
  (c) Dokážeme, že $A(n)$ platí pro nekonečně mnoho různých n, a také dokážeme, že pro každé n platí $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.
  (d) Dokážeme $A(0)$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ dokážeme $A(\lfloor n/2 \rfloor) \Rightarrow A(n)$.

(4) Mějme dvě transitivní relace R a S na X. Pak $R \circ S$ je
  (a) vždy transitivní.
  (b) nikdy transitivní.
  (c) může ale nemusí být transitivní.

(5) Kolik existuje relací na n-prvkové množině X?
  (a) $\binom{n}{2}$
  (b) n^2
  (c) 2^{n^2}
  (d) 2^{2^n}

(6) Buď $(X, \leq)$ uspořádaná množina. Které z následujících tvrzení **není** pravdivé?
  (a) Pokud je X konečná, pak existuje alespoň jeden minimální prvek.
  (b) Nejmenší prvek je vždy zároveň minimálním prvkem.
  (c) Pokud existuje největší prvek, existuje i nejmenší prvek.
  (d) Pokud existují alespoň dva minimální prvky, pak neexistuje nejmenší prvek.

(7) Která z následujících množin **není** podmnožinou množiny 2^X, kde $X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$?
  (a) $\emptyset$
  (b) $\{1,2\}$
  (c) $\{\{\{1,2\},\emptyset\},\{\{1,2\}\}\}$
  (d) 2^Y pro $Y = \{\{1\},\{1,2\}\}$

Uspořádání, funkce

Bijekce $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

(1) Najděte bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$,
(2) Najděte bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$. (Může pomoct si nejprve rozmyslet bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^2$.)

Součin uspořádání. Jedna lednička je evidentně lepší než druhá, pokud dosahuje současně nižší teploty a nižší spotřeby elektřiny. Obecněji: mějme (částečná) uspořádání $\leq_X$ na X a $\leq_Y$ na Y. Definujme relaxi $\preceq$ na $X \times Y$ takto:

$$(x,y) \preceq (x',y') \equiv (x \leq_X x') \wedge (y \leq_Y y') \ .$$

Dokažte, že tato relace je také uspořádání. Kdy je lineární?

Kombinatorické počítání

k-prvkové permutace. Nechť $P(n,k)$ je počet permutací k prvků z n-prvkové množiny. Jinými slovy, $P(n,k)$ je počet způsobů, jak lineárně uspořádat k z n prvků. Kombinatoricky dokažte:

(1) $P(n,k) = \binom{n}{k} k!$.
(2) $P(n,k) = P(n-1,k) + kP(n-1,k-1)$.

Podmnožiny. Určete počet

(1) uspořádaných dvojic (A, B), kde $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.
(2) uspořádaných čtveřic (A, B, C, D), kde $A \subseteq B \subseteq D \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ a také $A \subseteq C \subseteq D$.

Králové na šachovnici. Kolika způsoby lze rozestavit na šachovnici 8×8 černého a bílého krále tak, aby se neohrožovali (tj. nestáli na sousedních polích, kde sousedství je i do úhlopříčky)?

Kombinační čísla II. Dokažte následující vztahy početně či kombinatoricky (doporučuji to druhé):

(1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
(2) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$.
(3) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Kombinační čísla IV. Zjistěte, čemu se výrazy rovnají; nejlépe to pak vysvětlete kombinatoricky, nikoliv výpočtem :)

(1) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
(2) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k-1)\binom{n}{k}$

Definice 1. Nechť $\pi : [n] \to [n]$ je permutace. Řekneme, že podmnožina $S \subseteq [n]$ je *cyklem* π pokud lze prkvy S uspořádat, tzn. napsat $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ tak, že $x_i = \pi(x_{i-1})$ pro $i = 2, \ldots, k$ a $x_1 = \pi(x_k)$. Všimněte si, že permutaci na konečné množině lze rozložit na cykly, tzn. existuje rozklad $S_1 \dot\cup \ldots \dot\cup S_\ell = [n]$ t.ž. pro každé $j \in [\ell]$, S_j je cyklus π.

Permutace s jedním cyklem. Kolik je permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$ s právě jedním cyklem? Nezapomeňte zdůvodnit svoji odpověď.