3. cvičení

Kvíz

(1) Mějme konečné množiny X, Y, Z. Označme $x = |X|$, $y = |Y|$ a $z = |Z|$. Kolik prvků má kartézský součin $X \times Y \times Z$?
  (a) xyz
  (b) 2^{x+y+z}
  (c) $\max(x, y, z)$

(2) Mějme relaci R mezi X a Y a relaci S mezi Y a Z. Jak definujeme složení $R \circ S$?
  (a) $\{(x, z) \in X \times Z \mid (\exists y \in Y)((x, y) \in R \vee (y, z) \in S)\}$
  (b) $\{(x, z) \in X \times Z \mid (\exists y \in Y)((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S)\}$

(3) Mějme ekvivalenci R na množině X. Nechť $[x]_R$ označuje třídu ekvivalence určenou prvkem x. Které z následujících tvrzení **není** obecně pravdivé?
  (a) $(\forall x \in X)[x]_R \neq \emptyset$
  (b) $\bigcup_{x \in X}[x]_R = X$
  (c) $(\forall x, y \in X)|[x]_R| = |[y]_R|$
  (d) $(\forall x, y \in X)([x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset) \Rightarrow [x]_R = [y]_R$

(4) Mějme libovolnou množinu X. Relace $\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$ je:
  (a) Uspořádáním i ekvivalencí zároveň.
  (b) Pouze uspořádáním.
  (c) Pouze ekvivalencí.
  (d) Ani jedním.

Relace a funkce

Symetrická i antisymetrická. Najděte relaci na $\{1, 2, 3, 4\}$, která je současně symetrická i antisymetrická.

Ani symetrická, ani antisymetrická. Najděte relaci na $\{1, 2, 3, 4\}$, která není ani symetrická, ani antisymetrická.

Ekvivalenční třídy. U následující relace nahlédněte, že je to ekvivalence, a popište její ekvivalenční třídy:

- Pro $A, B \subseteq \{1, \ldots, n\}$: existuje bijekce mezi A a B.

Definice 1 (Lineární uspořádání). Řekneme, že uspořádání $\preceq$ na množině X je *lineární*, pokud pro každé $a, b \in X$ platí buď $a \preceq b$ nebo $b \preceq a$.

Relace dělitelnosti. Uvažujme relaci $x \mid y$ (x je dělitelem y) na množině $\{1, \ldots, n\}$.

(1) Dokažte, že je to uspořádání. Je lineární?
(2) Nakreslete Hasseův diagram (třeba pro $n = 13$).
(3) Jak vypadají nejmenší, největší, minimální a maximální prvky? (vyznačte je)
(4) Jak se odpovědi na předchozí otázky změní odebráním prvku 1?
(5) Jaký je největší antiřetězec?

Uspořádání na objednávku. Sestrojte uspořádání s následujícími vlastnostmi:

(1) žádný minimální ani maximální prvek
(2) žádný největší, ale aspoň 1 maximální
(3) žádný největší, ale právě 1 maximální
(4) nekonečně mnoho minimálních prvků a 1 maximální

Skládání funkcí.

(1) Jsou-li f, g prosté, je $f \circ g$ také prostá?
(2) Jsou-li f, g funkce na, je $f \circ g$ také na?
(3) Je-li f prostá a g libovolná, je $f \circ g$ nebo $g \circ f$ také prostá?
(4) Je-li f na a g libovolná, je $f \circ g$ nebo $g \circ f$ také na?
(5) Je-li $f \circ g$ prostá, musí být f nebo g prostá?
(6) Je-li $f \circ g$ na, musí být f nebo g na?
(7) Každá funkce f se dá zapsat jako $g \circ h$, kde g je na a h je prostá. Ano nebo ne?

Vnoření

Vnoření jedné uspořádané množiny $(X, \leq)$ do jiné uspořádané množiny $(Y, \preccurlyeq)$ je prosté zobrazení $f : X \to Y$ takové, že $\forall x, x' \in X : x \leq x' \Leftrightarrow f(x) \preccurlyeq f(x')$

Bijekce $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

(1) Najděte bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$,
(2) Najděte bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$. (Může pomoct si nejprve rozmyslet bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^2$.)

Bonus

Vlastnosti relací. Dokažte, že pro relaci R na množině X platí:

(1) R je reflexivní $\Leftrightarrow \Delta_X \subseteq R$, kde $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$.
(2) R je symetrická $\Leftrightarrow R = R^{-1}$.
(3) R je antisymetrická $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_X$.

Součin uspořádání. Jedna lednička je evidentně lepší než druhá, pokud dosahuje současně nižší teploty a nižší spotřeby elektřiny. Obecněji: mějme (částečná) uspořádání $\leq_X$ na X a $\leq_Y$ na Y. Definujme relaxi $\preceq$ na $X \times Y$ takto:

$$(x,y) \preceq (x',y') \equiv (x \leq_X x') \wedge (y \leq_Y y') \ .$$

Dokažte, že tato relace je také uspořádání. Kdy je lineární?