

RELACE

Rodinné vztahy. Uvažme univerzum všech lidí a definujme na něm relace O, M, B :

$$xOy \equiv x \text{ je otcem } y$$

$$xMy \equiv x \text{ je matkou } y$$

$$xBy \equiv x \text{ je bratrem } y$$

Jak pomocí operací nad relacemi vyjádříme relace „ x je rodičem y “, „ x je dítětem y “ a „ x je strýcem y “?

Ověření vlastností relace. Rozhodněte, které z následujících relací jsou reflexivní, symetrické, tranzitivní a slabě antisymetrické.

(1) $X = \{a, b, c\}, R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c)\}$,

(2) $X = \{a, b, c\}, R = \{(a, a), (c, c)\}$,

(3) $(X, R) = (\mathbb{N}, \leq)$,

(4) $X = \{1, 2, \dots, 10\}, R = \{(x, y) \mid nsd(x, y) = 1\}$, kde nsd je nejmenší společný násobek, tzn. $nsd(x, y) = 1$ právě když x, y jsou nesoudělná.

Uzavřenost reflexivity. Necht jsou R a S reflexivní relace na téže množině. Určete, které z následujících relací jsou také reflexivní – zdůvodněte, proč jsou reflexivní nebo nalezněte protipříklad.

(1) $R \cup S$

(2) $R \cap S$

(3) $R \setminus S$

(4) R^{-1}

Relace R^{-1} je inverzní relace k R a $(y, x) \in R^{-1}$ právě tehdy, když $(x, y) \in R$.

Transitivita. Necht R a S jsou tranzitivní relace na množině X . Budou následující relace také tranzitivní?

(1) $R \cup S$

(2) $R \cap S$

(3) $R \setminus S$

(4) $R \triangle S$ (operace XOR)

(5) $R \circ S$

(6) $R^{-1} \circ S^{-1}$

(7) R^{-1}

Skládání relací. Jak vypadá relace $R \circ R$, označuje-li R :

(1) relaci rovnosti na množině \mathbb{N} ,

(2) relaci \leq na \mathbb{N} ,

(3) relaci $<$ na \mathbb{N} ,

(4) relaci $<$ na \mathbb{R} .

Hint: rozmyslete si, jak vypadá $R \circ R$. Hodí se k tomu šipkový diagram.

Skládání a tranzitivita. Dokažte, že R je tranzitivní právě tehdy, když $R \circ R \subseteq R$.

Falešné skládání. Necht R a S jsou relace na množině X a platí, že

$$\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xSz.$$

Nalezněte protipříklad na tvrzení: R je tranzitivní právě tehdy když $S \subseteq R$.

MATEMATICKÁ INDUKCE (BONUS)

Vážené mocniny dvojky. Uhodněte nebo odvoďte vzoreček pro

$$\sum_{i=0}^n i2^i$$

a dokažte jeho správnost indukcí.