6. sada DÚ

Definice 1. Graf G je souvislý pokud pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ platí, že z u existuje cesta do v.

Doplněk nesouvislého `doplnek [GRAF]` [4 b.]

Dokažte, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Musí to platit obráceně? Tedy musí být každý graf se souvislým doplňkem nesouvislý?

Párty `party [GRAF]` [4 b.]

Pan a paní Novákovi byli na exkluzivní party, kde kromě nich byly jen 3 další páry. Někteří lidé se navzájem pozdravili potřesením rukou, samozřejmě nezdravili svého partnera, a nikdo s nikým se nezdravil dvakrát. Později se pan Novák každého (včetně své ženy) zeptal, s kolika lidmi si potřásli rukou. K překvapení všech dostal od každého jinou odpověď. S kolika lidmi si potřásla rukou paní Nováková?
Umíte to zobecnit na $n \geq 2$ párů na party?

Stupeň alespoň d `degd [GRAF]` [4 b.]

Ukažte, že každý graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň alespoň d, obsahuje cestu na $d + 1$ vrcholech jako podgraf.

Vlastnosti isomorfismu `isomorf [GRAF]` [5×1.2 b.]

Které z následujících výroků o isomorfismu jsou správné? Svá trvzení zdůvodněte.

(1) Grafy G a H jsou isomorfní, právě když pro každou bijekci $f : V(G) \to V(H)$ platí, že pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ platí následující ekvivalence:
$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$
(2) Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje bijekce $f : E(G) \to E(H)$.
(3) Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje bijekce $f : V(G) \to V(H)$ taková, že pro každý vrchol $v \in V(G)$ platí:
$$\deg_G(v) = \deg_H(f(v))$$
(4) Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje zobrazení $f : V(G) \to V(H)$ takové, že pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ platí následující ekvivalence:
$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$
(5) Každý graf s n vrcholy je isomorfní nějakému grafu na množině vrcholů $\{1, \ldots, n\}$.