13. cvičení

Připomenutí: V uniformním pravděpodobnostním prostoru je pravděpodobnost každého elementárního jevu $\omega \in \Omega$ stejná, totiž $\Pr(\omega) = 1/|\Omega|$. Tedy pravděpodobnost jevu $A \subseteq \Omega$ je $\Pr(A) = |A|/|\Omega|$.
Připomenutí: $\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$.
Připomenutí: jevy A a B jsou nezávislé tehdy, když $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$.

Střední hodnota

Problém čínského stolu. V čínských restauracích mají často velké kulaté otočné stoly. Je to proto, aby si každý mohl objednat vlastní jídlo, ale zároveň ochutnávat od ostatních pomocí otáčení stolu a ne výměnou talířů. Představme si n přátel, kteří se rozhodli navštívit takovýto podnik. Usedli tedy k velkému otočnému stolu s n místy a každý si objednal jiné jídlo. Číšník pak před každého položil jeho jídlo, ale jelikož byl zlomyslný, tak stůl roztočil. Jaká je pravděpodobnost, že před každým skončí právě jeho jídlo? Spočítejte střední hodnotu počtu přátel, před kterými skončí jejich jídlo. Uvažujte, že každé natočení je stejně pravděpodobné.

Stromky. Zahradnická firma sází po městě stromky; víme, že průměrně 90% z nich přežije. Jaká je pravděpodobnost, že z následujících 13 zasazených stromů, jich:

(1) Přežije nejvýše 10?
(2) Přežije alespoň 10?
(3) Přežije přesně 10?

Počet jedniček. Mějme pravděpodobností prostor $\mathcal{C}_n$ všech posloupností 0 a 1 délky n. Každá posloupnost má pravděpodobnost $1/2^n$. Spočítejte střední hodnotu počtu 1 v náhodně vybrané posloupnosti.

Hody mincí. Úvahou určete, kolikrát je třeba hodit spravedlivou mincí, aby:

- Střední hodnota počtu líců byla 5.
- Pravděpodobnost, že padne alespoň 5 líců byla 1/2.

Zajíci. Každý z n lovců zamíří na jednoho náhodně vybraného z n zajíců. Všichni myslivci naráz vystřelí a trefí zajíce, na kterého mířili. Náhodná veličina Z určuje počet přeživších zajíců. Spočítejte střední hodnotu Z.

První jednička. Mějme následující experiment: Házíme férovou mincí tak dlouho, dokud nepadne první hlava. Zkonstruujte pravděpodobnostní prostor, který je modelem tohoto experimentu, a určete střední hodnotu počtu hodů.

Rozptyl

Připomenutí: Rozptyl náhodné veličiny X je definován jako $\mathrm{Var}(X) = E[(X - EX)^2] = E[X^2] - E[X]^2$.

Rozptyl uniformního rozdělení. Nechť X je náhodná veličina, která nabývá hodnot $1, 2, \ldots, n$ s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti, tzn. $\Pr[X = i] = 1/n$ pro každé $i \in [n]$. Určete rozptyl této náhodné veličiny.

Rozptyl u nezávislých veličin. Ukažte, že pro nezávislé náhodné veličiny X a Y platí $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.
Připomenutí: Čebyševova nerovnost říká, že $\Pr[|X - EX| \geq k\sqrt{\mathrm{Var}(X)}] \leq 1/k^2$, což je totéž, jako
$\Pr[|X - EX| \geq k] \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{k^2}$.

Odhad pomocí Čebyševa. Předpokládejme, že hodíme stokrát spravedlivou kostkou. Nechť náhodná veličina X je rovna součtu hodnot všech hodů. Pomocí Čebyševovy nerovnosti odhadněte pravděpodobnost $\Pr[|X - 350| \geq 50]$.