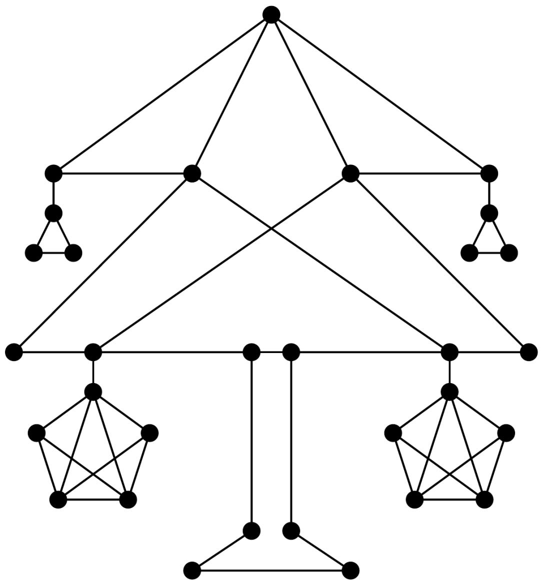
## Stromeček `strom` [$4 \times 2$ b.]



Určete pro graf na obrázku:

- Kolik má sudých podgrafů (tj. podgrafů se všemi stupni sudými)
- Kolik obsahuje indukovaných cyklů (tj. indukovaných podgrafů isomorfních cyklu)
- Nějakou minimální kostru, kde váha hrany je (pro tento účel) součet stupňů jejích koncových vrcholů a váha kostry je součet vah hran, z nichž se skládá
- Zda je rovinný

## Izomorfní duálu `isodual` [4 b.]

Najděte graf $G$ na alespoň 5 vrcholech a jeho nakreslení takové, že $G$ je isomorfní svému duálu $G^*$ (odvozenému z daného nakreslení).

## Graf s daným počtem koster `nkost` [4 b.]

Sestrojte pro každé $n \geq 3$ graf, který má právě $n$ koster. Dokažte, proč graf mající právě 2 kostry neexistuje.

## Maximální rovinný `triang` [8 b.]

*Maximální rovinný graf* je takový graf, že přidání jakékoliv další hrany (samozřejmě na téže množině vrcholů) způsobí, že graf již není rovinný. *Triangulace* je rovinný graf, v němž je každá stěna (včetně vnější) trojúhelník. Dokažte, že každá triangulace je maximální rovinný graf a naopak každý maximální rovinný graf je triangulace. *Pozor:* tato úloha má relativně jednoduchý argument, pokud každá stěna je kružnice (což platí, je-li graf tzv. *hranově* 2-*souvislý*, neboli když neobsahuje most.) Neopomeňte ve svém důkazu i na grafy, které 2-souvislé nejsou.

## Hamiltonovská krychle `hamcube` [6 b.]

Buď $d \in \mathbb{N}$ a $V = \{0,1\}^d$, tedy $V$ je množina 0/1 vektorů délky $d$. Grafu na $V$, ve kterém spolu dva vektory sousedí právě tehdy, když se liší v právě jedné souřadnici, se říká *d-dimenzionální krychle*. Dokažte, že pro $d \geq 2$ je $d$-dimenzionální krychle hamiltonovská, tedy že existuje kružnice, která prochází všemi vrcholy.

## Jednotažka 1 `jednadva` [3 b.]

Ukažte, že každý graf je možné nakreslit jedním tahem tak, že každou jeho hranou projdu dvakrát.

## Barvící algoritmus `balgo` [9 b.]

Na základě důkazu věty o 5 barvách navrhněte algoritmus, který rovinný graf obarví 5 barvami v čase $\mathcal{O}(n^c)$ pro nějaké $c \in \mathbb{N}$ (tzn. v polynomiálním, ale ne exponenciálním čase).

## Mapy s oblastmi `moblast` [6 b.]

Mějme politickou mapu, kde každý stát má nanejvýš $k$ oblastí, tzn. $\leq k$ stěn této mapy odpovídá jednomu státu a v dobrém obarvení musí dostat stejnou barvu. Dokažte, že každá taková mapa má obarvení nanejvýš $6k$ barvami.
*(Kapitoly říkají, že je možná potřeba $6(k+1)$, ale mě se to zdá jako chyba. Pokud se vám to $6k$ barvami nebude dařit, odevzdejte jako řešení ten nejlepší horní odhad, jaký dovedete.)*

## Barevnost duálu rovinného eulerovského `bdre` [4+4 b.]

Dokažte následující ekvivalenci: duál $G^*$ rovinného grafu $G$ je bipartitní právě tehdy když $G$ je eulerovský. (4b za každou implikaci.)

## $d$-degenerované grafy a trhání `degelim` [4 b.]

V důkazu $d+1$-obarvitelnosti $d$-degenerovaných grafů jsme implicitně dokázali následující implikaci:

Pokud je $G$ $d$-degenerovaný, pak existuje pořadí jeho vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_n$ takové, že, pro každé $i = 1, \ldots, n$, $v_i$ má nanejvýš $d$ sousedů v grafu $G[\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n\}]$, kde $G[S]$ pro $S \subseteq V(G)$ je podgraf $G$ indukovaný množinou vrcholů $S$, neboli $V(G[S]) = S$ a $E(G[S]) = E(G) \cap \binom{S}{2}$. Neformálně řečeno: graf $G$ lze postupně otrhat až na izolovaný vrchol tak, že vždy trháme vrchol stupně nanejvýš $d$.

(Když takovéto tvrzení máme, barvení už je jednoduché – můžeme jít od konce této posloupnosti a postupně "postavit" $G$ přilepováním vrcholu, který má nanejvýš $d$ sousedů ve stávajícím grafu – a pak vždy máme nějakou barvu, kterou lze takto nově lepený vrchol obarvit. Pro plný důkaz se podívejte do skript.)
**Váš úkol** je dokázat opačnou implikaci: pokud lze uspořádat vrcholy do sekvence $v_1, \ldots, v_n$ takové, že, pro každé $i = 1, \ldots, n$, $v_i$ má v $G[\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n\}]$ nanejvýš $d$ sousedů, pak je $G$ $d$-degenerovaný. (Tzn. "otrhatelnost" vrcholy stupně nanejvýš $d$ je ekvivalentní s $d$-degenerovaností.)