

Orientované eulerovské grafy. Dokažte, že $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ (což nakonec dá ekvivalenci všech výroků). Necht G je orientovaný graf.

- (1) G má uzavřený eulerovský tah,
- (2) G je silně souvislý a $\forall v \in V : d^+(v) = d^-(v)$,
- (3) G je slabě souvislý a $\forall v \in V : d^+(v) = d^-(v)$.

Rozklad na kružnice. Dokažte, že hrany každého eulerovského grafu lze rozložit na sjednocení kružnic.

Sudé stupně bez mostu. Dokažte, že graf, jehož vrcholy mají jen sudé stupně, neobsahuje most. Most je hrana, po jejímž odebrání vzroste počet komponent souvislosti.

Cracking kódu. Garáž se odemká 0/1 kódem délky 8, ale dozvěděli jste se o bezpečnostní díře, totiž že není nutné se zadáváním pokaždé začínat odznovu. Například, je-li kód 01010101, tak dveře odemkne zadání jakékoliv posloupnosti, která končí správným kódem, třeba 1101001010101. Najděte způsob, jak zkonstruovat co nejkratší posloupnost 0/1, která obsahuje jako (souvislou) podposloupnost každou 0/1 posloupnost délky 8 (tzn. každý potenciální odemykací kód).

Kolik tahů? Kolika nejméně (otevřenými a uzavřenými) tahy lze nakreslit jakýkoliv souvislý graf? (Neboli: na kolik nejméně tahů lze rozložit jeho množinu hran?)

Definice 1. *Line graf* H grafu G je graf, jehož vrcholy představují hrany G a dvě hrany G tvoří hranu H právě pokud jsou incidentní (v nějakém vrcholu G). Jinými slovy H představuje relaci incidence na hranách G .

Eulerovskost line grafu. Dokažte, že line graf eulerovského grafu je eulerovský.