7. sada DÚ

Skoro úplné grafy `skup` [5 b.]

Dokažte, že pro každé n jsou všechny $(n-2)$-regulární grafy na n vrcholech navzájem isomorfní. (Graf je k-regulární právě tehdy, když každý vrchol má stupeň k.)

Kružnice v $K_{n,n}$ `kruzKnn` [6 b.]

Spočítejte počet různých kružnic v grafu $K_{n,n}$

Nesouvislý doplněk `ndoplnek` [4 b.]

Ukažte, že doplněk grafu $G = (V, E)$ je nesouvislý právě tehdy když G obsahuje úplný bipartitní graf jako podgraf na všech vrcholech (tzn. obsahuje podgraf $H = (V, E')$ t.ž. H je isomorfní $K_{n,m}$ pro nějaké $n, m \in \mathbb{N}$.)

Definice 1. Nechť je $G = (V, E)$ graf a $V' \subseteq V$. Řekneme, že V' je *nezávislá množina*, pokud $\forall u, v \in V' : uv \notin E$, tedy mezi žádnými dvěma vrcholy V' nevede hrana.

Nezávislá množina a maximální stupeň `nezdeg` [5 b.]

Nechť $\alpha(G)$ značí velikost největší nezávislé množiny v grafu G a $\Delta(G)$ jeho maximální stupeň. Dokažte

$$\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{\Delta(G) + 1}$$

Nezávislá množina a vrcholové pokrytí `isvc` [4 b.]

Dokažte, že pro každý graf G platí, že $U \subseteq V(G)$ je nezávislá množina právě tehdy, když $V(G) \setminus U$ (doplněk U) je vrcholové pokrytí. Množina $C \subseteq V(G)$ je vrcholové pokrytí grafu G pokud pro každou hranu $\{u, v\} \in E(G)$ platí, že $u \in C$ nebo $v \in C$.

Kostry a hrana `kostryhrana` [5 b.]

Nechť T a $\bar{T}$ jsou dvě různé kostry grafu G. Dokažte, že potom pro každou $e \in T \setminus \bar{T}$ existuje $\bar{e} \in \bar{T} \setminus T$ taková, že $T - e + \bar{e}$ je také kostra.