

**Definice 1.** Graf  $G$  je souvislý pokud pro každé dva vrcholy  $u, v \in V(G)$  platí, že z  $u$  existuje cesta do  $v$ .

**Doplněk nesouvislého** doplněk [4 b.]

Dokažte, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Musí to platit obráceně? Tedy musí být každý graf se souvislým doplňkem nesouvislý?

**Nejdelší cesty** nejdelsi [4 b.]

Dokažte, že každé dvě nejdelší cesty v souvislém grafu mají společný vrchol.

**Párty** party [4 b.]

Pan a paní Novákovi byli na exkluzivní party, kde kromě nich byly jen 3 další páry. Někteří lidé se navzájem pozdravili potřesením rukou, samozřejmě nezdravili svého partnera, a nikdo s nikým se nezdravil dvakrát. Později se pan Novák každého (včetně své ženy) zeptal, s kolika lidmi si potřásl rukou. K překvapení všech dostal od každého jinou odpověď. S kolika lidmi si potřásla rukou paní Nováková?

Umíte to zobecnit na  $n \geq 2$  párů na party?

**Stupeň alespoň  $d$**  degd [4 b.]

Ukažte, že každý graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň alespoň  $d$ , obsahuje cestu na  $d + 1$  vrcholech jako podgraf.

**Vlastnosti isomorfismu** isomorf [5 × 1.2 b.]

Které z následujících výroků o isomorfismu jsou správné? Svá tvrzení zdůvodněte.

- (1) Grafy  $G$  a  $H$  jsou isomorfní, právě když pro každou bijekci  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  platí, že pro každé dva vrcholy  $u, v \in V(G)$  platí následující ekvivalence:

$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$

- (2) Grafy  $G$  a  $H$  jsou isomorfní, právě když existuje bijekce  $f : E(G) \rightarrow E(H)$ .  
(3) Grafy  $G$  a  $H$  jsou isomorfní, právě když existuje bijekce  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  taková, že pro každý vrchol  $v \in V(G)$  platí:

$$\deg_G(v) = \deg_H(f(v))$$

- (4) Grafy  $G$  a  $H$  jsou isomorfní, právě když existuje zobrazení  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  takové, že pro každé dva vrcholy  $u, v \in V(G)$  platí následující ekvivalence:

$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$

- (5) Každý graf s  $n$  vrcholy je isomorfní nějakému grafu na množině vrcholů  $\{1, \dots, n\}$ .