

Kvíz

- (1) Mějme relaci R na množině X , která je symetrická a tranzitivní a každý prvek $x \in X$ je v relaci s aspoň jedním prvkem. (Poslední vlastnost se dá formálně zapsat jako $|\{(a, b) \in R \mid a = x \wedge b = x\}| \geq 1$.) Pak R je také reflexivní.
 - (a) ano
 - (b) ne
- (2) Mějme ekvivalenci $x \sim y \Leftrightarrow x - y \pmod{3} = 0$ na přirozených číslech \mathbb{N} . Co je $[23]_{\sim}$, tzn. třída ekvivalence prvku 23?
- (3) Graf je dvojice (V, E) , kde...
 - (a) $E = \binom{V}{2}$
 - (b) $E \subseteq V \times V$
 - (c) $E \subseteq \binom{V}{2}$
- (4) Necht' $G = (V, E)$ je graf a $W \subseteq V$ je podmnožina jeho vrcholů. Podgraf indukovaný W má množinu hran F , která je...
 - (a) $F \subseteq \binom{V}{2}$
 - (b) $F = \binom{W}{2}$
 - (c) $F = \binom{W}{2} \cap E$
 - (d) $F \subseteq \binom{W}{2} \cap E$

KOMBINATORIKA

Obdélníky v síti. Kolik je ve čtvercové mřížce $n \times n$ obdélníků, jejichž rohy jsou body mřížky?

Podmnožiny bez sousedů. Kolik je podmnožin $\{1, 2, \dots, n\}$ neobsahujících dvě po sobě jdoucí čísla?

Kameny na šachovnici. Kolika způsoby lze umístit osm kamenů na šachovnici 4×4 tak, aby se na šachovnici vyskytovaly čtyři kameny ve stejném řádku nebo stejném sloupci?

Dělitelnost faktoriálu.

- (1) Ukažte, že $k!$ dělí součin každých k po sobě jdoucích (přirozených) čísel. *Hint: zamyslete se nad správně zvoleným kombinačním číslem...*
- (2) Ukažte s pomocí předchozího tvrzení, že $(k!)^n$ dělí $(kn)!$.

GRAFY

Důležité grafy. Nakreslete K_4, C_5, P_3 a $K_{2,3}$.

Isomorfismus doplňků. Ukažte, že dva grafy jsou isomorfní právě tehdy, když jsou isomorfní jejich doplňky.

Lichý cyklus. Ukažte, že když graf G obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak taky obsahuje lichý cyklus jako indukovaný podgraf.

Samodoplňkové kružnice. Graf G je samodoplňkový, pokud je isomorfní svému doplňku \overline{G} . Najděte všechny samodoplňkové kružnice a ukažte, že žádné další neexistují.

Stupně 4 nebo 5. Graf G má 14 vrcholů a 30 hran a každý vrchol je stupně 4 nebo 5. Kolik má vrcholů stupně 5?

Doplňěk bipartitního. Existuje bipartitní graf s alespoň 5 vrcholy, jehož doplněk je taky bipartitní?