koutecky@iuuk.mff.cuni.cz

4. sada DÚ

29. 10. 2019. Deadline 6. 11. 2020

Zobrazení

Definice 1 (Složení zobrazení)**.** Mějme zobrazení $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$. Pak jejich *složení* je zobrazení $g \circ f$ definované jako $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \in Z$ pro každé $x \in X$.
Pozor: pořadí je opačné než ve značení u relací, tedy *druhá* funkce ve skládání se píše *jako první*.

Skládání zobrazení 3 `sklad3` [4×1 b.]

Rozhodněte a dokažte, zda pro zobrazení f a g typu $M \to M$ platí následující 4 tvrzení. Pokud ano, dokažte, pokud ne, ukažte protipříklad.

- když $f \circ g$ je prosté potom **a)** f je prosté **b)** g je prosté
- když $f \circ g$ je na potom **c)** f je na **d)** g je na

Bijekce $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$ `bijnq` [5 b.]

Najděte bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$.

Identita `identita` [3 b.]

Rozhodněte a dokažte, zda pro relaci na množině M pravda, že $f \circ f = f$ implikuje, že f je tzv. *identita* Id_M, což je funkce definovaná jako $Id_M(x) = x$ pro každé $x \in M$.

Kombinatorika

Eratosthenovo síto za milion `erat3` [3 b.]

Kolik čísel zbude z množiny $\{1, 2, \ldots, 1000000\}$ po vyškrtání všech násobků čísel $77, 91, 143$ a 154? (Můžete používat jakékoliv pomůcky, ale řešení musíte řádně zdůvodnit.)

Kombinační čísla III `komb3` [$6 \times 1,5$ b.]

Dokažte následující vztahy početně i kombinatoricky:

(1) $\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$.
(2) $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$.
(3) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.