4. cvičení

Kvíz

Přiřaďte následující kvantity. *Pozor:* nemusí se jednat o zobrazení prosté či na. $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

(a) n^k	**(1)** #bijekcí z $[n]$ do $[n]$
(b) $n!$	**(2)** #k-tic prvků z $[n]$
(c) $\frac{n!}{(n-k)!}$	**(3)** #k-tic navzájem různých prvků z $[n]$
(d) $\binom{n}{k}$	**(4)** #funkcí z $[k]$ do $[n]$
(e) 2^n	**(5)** #k-prvkových podmnožin $[n]$
	(6) #prostých funkcí $[k] \to [n]$
	(7) #(lineárních) uspořádání n prvků (*ne ve smyslu uspořádané množiny*)

Kombinatorické počítání

Ukázky. Kombinatoricky dokažte:

(1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
(2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{k-1}$

Teď vy :-). Nechť $P(n, k)$ je počet permutací k prvků z n-prvkové množiny. Jinými slovy, $P(n, k)$ je počet způsobů, jak lineárně uspořádat k z n prvků. Kombinatoricky dokažte:

(1) $P(n, k) = \binom{n}{k}k!$.
(2) $P(n, k) = P(n-1, k) + kP(n-1, k-1)$.

Cesty v mřížce. Kolika způsoby lze projít čtvercovou mřížku obdélníkového tvaru z levého dolního rohu do pravého horního rohu, pokud má m čtverečků ve vodorovném směru, n čtverečků ve svislém směru a můžeme se pohybovat jen směrem vpravo a nahoru po hranách mřížky?

Podmnožiny. Určete počet

(1) uspořádaných dvojic (A, B), kde $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.
(2) uspořádaných čtveřic (A, B, C, D), kde $A \subseteq B \subseteq D \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ a také $A \subseteq C \subseteq D$.

Králové na šachovnici. Kolika způsoby lze rozestavit na šachovnici 8×8 černého a bílého krále tak, aby se neohrožovali (tj. nestáli na sousedních polích, kde sousedství je i do úhlopříčky)?

Kombinační čísla II. Dokažte následující vztahy početně či kombinatoricky (doporučuji to druhé):

(1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
(2) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$.
(3) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Kombinační čísla IV. Zjistěte, čemu se výrazy rovnají; nejlépe to pak vysvětlete kombinatoricky, nikoliv výpočtem :)

(1) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
(2) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k-1)\binom{n}{k}$