koutecky@iuuk.mff.cuni.cz

3. cvičení

Kvíz

(1) Chceme dokázat $(\forall n \in \mathbb{N})A(n)$. Který z následujících způsobů **není** korektní?
  (a) Dokážeme $A(0), A(1)$ a pro každé n dokážeme tvrzení $A(n) \Rightarrow A(n+2)$.
  (b) Dokážeme, že $A(n)$ platí pro nekonečně mnoho různých n, a také dokážeme, že pro každé n platí $A(n) \Rightarrow A(n-1)$.
  (c) Dokážeme, že $A(n)$ platí pro nekonečně mnoho různých n, a také dokážeme, že pro každé n platí $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.
  (d) Dokážeme $A(0)$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ dokážeme $A(\lfloor n/2 \rfloor) \Rightarrow A(n)$.

(2) Mějme dvě transitivní relace R a S na X. Pak $R \circ S$ je
  (a) vždy transitivní.
  (b) nikdy transitivní.
  (c) může ale nemusí být transitivní.

(3) Kolik existuje relací na n-prvkové množině X?
  (a) $\binom{n}{2}$
  (b) n^2
  (c) 2^{n^2}
  (d) 2^{2^n}

(4) Buď $(X, \leq)$ uspořádaná množina. Které z následujících tvrzení **není** pravdivé?
  (a) Pokud je X konečná, pak existuje alespoň jeden minimální prvek.
  (b) Nejmenší prvek je vždy zároveň minimálním prvkem.
  (c) Pokud existuje největší prvek, existuje i nejmenší prvek.
  (d) Pokud existují alespoň dva minimální prvky, pak neexistuje nejmenší prvek.

(5) Která z následujících množin **není** podmnožinou množiny 2^X, kde $X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$?
  (a) $\emptyset$
  (b) $\{1, 2\}$
  (c) $\{\{\{1,2\},\emptyset\},\{\{1,2\}\}\}$
  (d) 2^Y pro $Y = \{\{1\},\{1,2\}\}$

Relace a funkce

Symetrická i antisymetrická. Najděte relaci na $\{1, 2, 3, 4\}$, která je současně symetrická i antisymetrická.

Ani symetrická, ani antisymetrická. Najděte relaci na $\{1, 2, 3, 4\}$, která není ani symetrická, ani antisymetrická.

Ekvivalenční třídy. U následujících relací nahlédněte, že jsou to ekvivalence, a popište jejich ekvivalenční třídy:
(1) Pro $A, B \subseteq \{1, \dots, n\}$: existuje bijekce mezi A a B.
(2) Pro $x, y \in \mathbb{Z}$: $x - y$ je násobkem 7.

Relace dělitelnosti. Uvažujme relaci $x \mid y$ (x je dělitelem y) na množině $\{1, \dots, n\}$.
(1) Dokažte, že je to uspořádání. Je lineární?
(2) Nakreslete Hasseův diagram (třeba pro $n = 13$).
(3) Jak vypadají nejmenší, největší, minimální a maximální prvky?
(4) Jak se odpovědi na předchozí otázky změní odebráním prvku 1?
(5) Jaký je největší antiřetězec?

Uspořádání na objednávku. Sestrojte uspořádání s následujícími vlastnostmi:
(1) žádný minimální ani maximální prvek
(2) žádný největší, ale aspoň 1 maximální
(3) žádný největší, ale právě 1 maximální
(4) nekonečně mnoho minimálních prvků a 1 maximální

Skládání funkcí.
(1) Jsou-li f, g prosté, je $f \circ g$ také prostá?
(2) Jsou-li f, g funkce na, je $f \circ g$ také na?
(3) Je-li f prostá a g libovolná, je $f \circ g$ nebo $g \circ f$ také prostá?
(4) Je-li f na a g libovolná, je $f \circ g$ nebo $g \circ f$ také na?
(5) Je-li $f \circ g$ prostá, musí být f nebo g prostá?
(6) Je-li $f \circ g$ na, musí být f nebo g na?

(7) Každá funkce f se dá zapsat jako $g \circ h$, kde g je na a h je prostá. Ano nebo ne?

Bonus

Vlastnosti relací. Dokažte, že pro relaci R na množině X platí:

(1) R je reflexivní $\Leftrightarrow \Delta_X \subseteq R$, kde $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$.
(2) R je symetrická $\Leftrightarrow R = R^{-1}$.
(3) R je antisymetrická $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_X$.
(4) R je tranzitivní$\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$.

Součin uspořádání. Jedna lednička je evidentně lepší než druhá, pokud dosahuje současně nižší teploty a nižší spotřeby elektřiny. Obecněji: mějme (částečná) uspořádání $\leq_X$ na X a $\leq_Y$ na Y. Definujme relaxi $\preceq$ na $X \times Y$ takto:

$$(x,y) \preceq (x',y') \equiv (x \leq_X x') \wedge (y \leq_Y y') \ .$$

Dokažte, že tato repace je také uspořádání. Kdy je lineární?