

**Mocnina relace** Rn [2 × 2, 5 b.]

Pro relaci  $R$  na množině  $X$  definujeme indukci relací  $R^n : R^1 = R, R^{n+1} = R \circ R^n$ .

- (1) Dokažte, že je-li  $X$  konečná množina, potom existují  $r, s \in \mathbb{N}, r < s$  takové, že  $R^r = R^s$ .
- (2) Nalezněte relaci na nekonečné množině takovou, že všechny  $R^n$  jsou různé – tedy předchozí bod pro nekonečné množiny neplatí.

**Transitivita tranzit** [7 × 1 b.]

Necht'  $R$  a  $S$  jsou tranzitivní relace na množině  $X$ . Budou následující relace také tranzitivní?

- $R \cup S$
- $R \cap S$
- $R \setminus S$
- $R \Delta S$  (operace XOR)
- $R \circ S$
- $R^{-1} \circ S^{-1}$
- $R^{-1}$

**Ekvivalence III** ekv [4 × 1, 5 b.]

Rozhodněte, zda následující relace jsou ekvivalence a pokud jsou určete jejich třídy ekvivalence:

- (a)  $X = \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, (x, y) \in R \iff p \text{ dělí } (x - y)$
- (b)  $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}, (x, y) \in R \iff x \text{ dělí } y \text{ a zároveň } y \text{ dělí } x$
- (c)  $X = \mathbb{N}, (x, y) \in R \iff \exists z \in \mathbb{N}, \text{ že } z \text{ dělí } x \text{ i } y$
- (d)  $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), ((a, b), (c, d)) \in R \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$