2. cvičení

Kvíz

(1) Mějme konečné množiny X, Y, Z. Označme $x = |X|$, $y = |Y|$ a $z = |Z|$. Kolik prvků má kartézský součin $X \times Y \times Z$?
  (a) xyz
  (b) 2^{x+y+z}
  (c) $\max(x, y, z)$

(2) Mějme relaci R mezi X a Y a relaci S mezi Y a Z. Jak definujeme složení $R \circ S$?
  (a) $\{(x, z) \in X \times Z \mid (\exists y \in Y)((x, y) \in R \vee (y, z) \in S)\}$
  (b) $\{(x, z) \in X \times Z \mid (\exists y \in Y)((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S)\}$

(3) Mějme ekvivalenci R na množině X. Nechť $R[x]$ označuje třídu ekvivalence určenou prvkem x. Které z následujících tvrzení **není** obecně pravdivé?
  (a) $(\forall x \in X)R[x] \neq \emptyset$
  (b) $\bigcup_{x \in X} R[x] = X$
  (c) $(\forall x, y \in X)|R[x]| = |R[y]|$
  (d) $(\forall x, y \in X)(R[x] \cap R[y] \neq \emptyset) \Rightarrow R[x] = R[y]$

(4) Mějme libovolnou množinu X. Relace $\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$ je:
  (a) Uspořádáním i ekvivalencí zároveň.
  (b) Pouze uspořádáním.
  (c) Pouze ekvivalencí.
  (d) Ani jedním.

(5) Mějme uspořádanou množinu $(X, \preceq)$ s nejmenším prkvem. Nechť $Y \subseteq X$ je neprázdná. Má uspořádaná množina $(Y, \preceq_Y)$, kde $\preceq_Y = \preceq \cap (Y \times Y)$ také nejmenší prvek?
  (a) Vždy ano.
  (b) Nikdy ne.
  (c) Může, ale nemusí mít.

Matematická indukce

Vážené mocniny dvojky. Uhodněte nebo odvoďte vzoreček pro

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i$$

a dokažte jeho správnost indukcí.

Relace

Skládání relací. Jak vypadá relace $R \circ R$, označuje-li R:
(1) relaci rovnosti na množině $\mathbb{N}$,
(2) relaci $\leq$ na $\mathbb{N}$,
(3) relaci $<$ na $\mathbb{N}$,
(4) relaci $<$ na $\mathbb{R}$.

Falešné skládání. Nechť R a S jsou relace na množině X a platí, že

$$\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xSz.$$

Nalezněte protipříklad na tvrzení: R je tranzitivní právě tehdy když $S \subseteq R$.

Mocnina relace. Pro relaci R na množině X definujeme indukcí relaci $R^n : R^1 = R, R^{n+1} = R \circ R^n$.
(1) Dokažte, že je-li X konečná množina, potom existují $r, s \in \mathbb{N}, r < s$ takové, že $R^r = R^s$.
(2) Nalezněte relaci na nekonečné množině takovou, že všechny R^n jsou různé – tedy předchozí bod pro nekonečné množiny neplatí.

Rodinné vztahy. Uvažme univerzum všech lidí a definujme na něm relace O, M, B:

$$xOy \equiv x \text{ je otcem } y$$
$$xMy \equiv x \text{ je matkou } y$$
$$xBy \equiv x \text{ je bratrem } y$$

Jak pomocí operací nad relacemi vyjádříme relace „x je rodičem y“, „x je dítětem y“ a „x je strýcem y“?

Uzavřenost reflexivity. Nechť jsou R a S reflexivní relace na téže množině. Určete, které z následujících relací jsou také reflexivní – zdůvodněte, proč jsou reflexivní nebo nalezněte protipříklad.

(1) $R \cup S$
(2) $R \cap S$
(3) $R \setminus S$
(4) R^{-1}

Relace R^{-1} je inverzní relace k R a $(y, x) \in R^{-1}$ právě tehdy, když $(x, y) \in R$.

Ekvivalence III. Rozhodněte, zda následující relace jsou ekvivalence a pokud jsou určete jejich třídy ekvivalence:
(a) $X = \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$, $(x, y) \in R \iff p$ dělí $(x - y)$
(b) $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(x, y) \in R \iff x$ dělí y a zároveň y dělí x
(c) $X = \mathbb{N}$, $(x, y) \in R \iff \exists z \in \mathbb{N}$, že z dělí x i y
(d) $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $((a, b), (c, d)) \in R \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$