

## ÚVOD

### Principy cvičení.

- **Vy** se chcete něco naučit.
- **Já** se vám k tomu snažím vytvářet prostor.
- Proto je nejdůležitější, co potřebujete **vy**:
  - ... pochopit něco z přednášky
  - ... pochopit příklad z minulého cvičení
  - ... pochopit domácí úkol atd.
- **Nebojte se** klást otázky
- Pár obecných **tipů**:
  - Když si nevíte rady, zkuste si hrát s příklady. (Neumíte dokázat tvrzení pro obecná  $n$  a  $k$ ? Vyzkoušejte si, co vlastně říká pro nějaké malé hodnoty.)
  - Zkuste svůj “zásek” vysvětlit part’ákům. Nejdřív jim vysvětlete, čemu **rozumíte** a čemu **nerozumíte** (samotným vám to pomůže uchopit jádro problému). I pokud si part’áci taky neví s úlohou rady, můžou vám pomoci s tím, kde jste se zasekli vy.
  - Když si pořád nevíte rady, přivolejte mě, snad budu umět pomoci :)
  - Řešení příkladů budete prezentovat vy – vaše myšlení si je bližší!

### Technické detaily.

- Pište mi na koutecky@iuuk.mff.cuni.cz, do předmětu dejte [DM]
- Web cvičení je na [http://research.koutecky.name/db/teaching:dm2021\\_cviceni](http://research.koutecky.name/db/teaching:dm2021_cviceni)
- Na zápočet potřebujete nasbírat 100 bodů, ty můžete získat za:
  - **řešení** domácích úkolů (každé dva týdny, celkový počet bodů asi 150; z každé série musíte korektně vyřešit aspoň jeden příklad, ne nutně do termínu),
  - **opravování** domácích úkolů spolužákům,
  - **myšlenkovou mapu** předmětu
  - *(Naopak nevyžadují **prezenci** – pokud se toho více naučíte jinde/jindy/jinak, klidně na cvičení nechoďte. Ale věřím, že vám účast na cvičení může pomoci mít nějakou pravidelnost v učení se.)*
- Úkoly se odevzdávají elektronicky přes MS Teams. Pokud nejste v týmu, napište mi email.
- Pokud máte konkrétní otázky k cvičení či přednášce, které nejsou osobního rázu, položte otázku na MS Teams – ostatní můžou benefitovat z toho, že diskuse proběhne tam.
- Pokud budete potřebovat i jinou **konzultaci**, proberte to nejprve se spolužáky a když vás bude víc, dohodneme se na zvláštní zoom call.

## MATEMATICKÉ HŘÍČKY

**Mravenci na tyči.** V zájmu vědy jste na metrovou tyč rozmístili 25 mravenců. Na počátku všichni mravenci stojí na místě. Když tlesknete, každý mravenec se rozejde rychlostí 1 cm/s směrem k jednomu z konců tyče. Pokud dojde na konec tyče, spadne dolů a dál se pokusu neúčastní. Pokud se dva mravenci potkají, nemohou se vyhnout, takže se oba otočí čelem vzad a pokračují v chůzi. Dokažte, že pro každou možnou volbu počáteční polohy a směru mravenců platí, že všichni mravenci do 100 sekund popadají.

**Lámání čokolády 1.** Tabulku čokolády  $m \times n$  dílků chceme rozlámat na jednotlivé dílky. Kolik nejméně rozlomení je na to potřeba? A kolik nejvíce?

**Lámání čokolády – hra.** Opět lámání čokolády, tentokrát pro dva hráče. Hráči se pravidelně střídají v tazích. Ten, který je zrovna na tahu, si vybere jednu z částí čokolády a libovolně ji rozlomí, pouze je zakázáno odlamovat kousky  $1 \times 1$ . Kdo nemůže udělat tah, prohrál. Vymyslete vyhrávající strategii pro hráče, který začíná, víte-li, že alespoň jeden z rozměrů čokolády je na počátku sudý.

## DŮKAZY SPOREM

**Nekonečnost prvočísel.** Dokažte, že počet prvočísel je nekonečný.

$\sqrt{2}$ . Dokažte, že  $\sqrt{2}$  je iracionální.

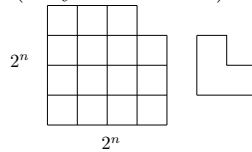
DŮKAZY INDUKCÍ

**Identita 1.** Dokažte, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left( \sum_{i=1}^n i \right)^2$$

**Přímký.** Nakresleme  $n$  přímek v rovině tak, že žádné 2 nejsou rovnoběžné a žádné 3 se neprotínají v jednom bodě. Dokažte, že rovina je tím rozdělena na přesně  $\frac{n(n+1)}{2} + 1$  částí.

**Vykousnutá šachovnice.** Máme šachovnici  $2^n \times 2^n$  ve které chybí jedno políčko, jako na obrázku. Dokažte, že ji můžeme vydláždit mnohoúhelníky ve tvaru L (taky viz obrázek).



**Mince 3 a 5.** Jsme v divné zemi, kde existují mince hodnoty 3 a 5. Dokažte, že každý obnos větší než 7 lze zaplatit pouze těmito mincemi.

**Dělitelnost pěti.** Dokažte, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $n^5 - n$  dělitelné 5 (beze zbytku).

MATEMATICKÉ ZNAČENÍ

**Čtení sum a produktů.** Rozepište následující výrazy:

$$\sum_{i=0}^5 a_{i^2} \quad \sum_{i=0}^5 (a_{i+1} - a_i) \quad \sum_{1 \leq i^2 \leq 10} a_i \quad \prod_{i=1}^5 \frac{a_i}{a_{i+1}}$$

**Distributivita průniku a sjednocení.** Zapište výraz

$$\bigcap_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m A_{i,j}$$

jako sjednocení průniků.

**Potenční množiny.** Je pravda, že pro každé dvě množiny  $X$  a  $Y$  platí  $2^X = 2^Y$ , právě když  $X = Y$ ?