

Barvící algoritmus balgo [3 b.]

Na základě důkazu věty o 5 barvách navrhnete algoritmus, který rovinný graf obarví 5 barvami v čase $\mathcal{O}(n^c)$ pro nějaké $c \in \mathbb{N}$ (tzn. v polynomiálním, ale ne exponenciálním čase).

Mapy s oblastmi moblast [2 b.]

Mějme politickou mapu, kde každý stát má nanejvýš k oblastí, tzn. $\leq k$ stěn této mapy odpovídá jednomu státu a v dobrém obarvení musí dostat stejnou barvu. Dokažte, že každá taková mapa má obarvení nanejvýš $6k$ barvami.

(Kapitoly říkají, že je možná potřeba $6(k+1)$, ale mě se to zdá jako chyba. Pokud se vám to $6k$ barvami nebude dařit, odevzdejte jako řešení ten nejlepší horní odhad, jaký dovedete.)

Barevnost duálu rovinného eulerovského bdre [2+2 b.]

Dokažte následující ekvivalenci: duál G^* rovinného grafu G je bipartitní právě tehdy když G je eulerovský. (2b za každou implikaci.)

d -degenerované grafy a trhání degelim [2 b.]

V důkazu $d+1$ -obarvitelnosti d -degenerovaných grafů jsme implicitně dokázali následující implikaci:

Pokud je G d -degenerovaný, pak existuje pořadí jeho vrcholů v_1, v_2, \dots, v_n takové, že, pro každé $i = 1, \dots, n$, v_i má nanejvýš d sousedů v grafu $G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}]$, kde $G[S]$ pro $S \subseteq V(G)$ je podgraf G indukovaný množinou vrcholů S , neboli $V(G[S]) = S$ a $E(G[S]) = E(G) \cap \binom{S}{2}$. Neformálně řečeno: graf G lze postupně otrhat až na izolovaný vrchol tak, že vždy trháme vrchol stupně nanejvýš d .

(Když takovéto tvrzení máme, barvení už je jednoduché – můžeme jít od konce této posloupnosti a postupně “postavit” G přilepováním vrcholu, který má nanejvýš d sousedů ve stávajícím grafu – a pak vždy máme nějakou barvu, kterou lze takto nově lepený vrchol obarvit. Pro plný důkaz se podívejte do skript.)

Váš úkol je dokázat opačnou implikaci: pokud lze uspořádat vrcholy do sekvence v_1, \dots, v_n takové, že, pro každé $i = 1, \dots, n$, v_i má v $G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}]$ nanejvýš d sousedů, pak je G d -degenerovaný. (Tzn. “otrhatelnost” vrcholy stupně nanejvýš d je ekvivalentní s d -degenerovaností.)