

Cracking kódu

Garáž se odemká 0/1 kódem délky 8, ale dozvěděli jste se o bezpečnostní díře, totiž že není nutné se zadáváním pokaždé začínat odznovu. Například, je-li kód 01010101, tak dveře odemkne zadání jakékoliv posloupnosti, která končí správným kódem, třeba 1101001010101. Najděte způsob, jak zkonstruovat co nejkratší posloupnost 0/1, která obsahuje jako (souvislou) podposloupnost každou 0/1 posloupnost délky 8 (tzn. každý potenciální odemkací kód).

Nezávislá ve stromu

Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. (Nezávislá množina je množina vrcholů, mezi nimiž nejsou žádné hrany.)

Rozklad na kružnice

Dokažte, že hrany každého eulerovského grafu lze rozložit na sjednocení kružnic.

Sudé stupně bez mostu

Dokažte, že graf, jehož vrcholy mají jen sudé stupně, neobsahuje most. Most je hrana, po jejímž odebrání vzroste počet komponent souvislosti.

Kolik tahů?

Kolika nejméně (otevřenými a uzavřenými) tahy lze nakreslit jakýkoliv souvislý graf? (Neboli: na kolik nejméně tahů lze rozložit jeho množinu hran?)

Definice 1. *Line graf* H grafu G je graf, jehož vrcholy představují hrany G a dvě hrany G tvoří hranu H právě pokud jsou incidentní (v nějakém vrcholu G). Jinými slovy H představuje relaci incidence na hranách G .

Eulerovskost line grafu

Dokažte, že line graf eulerovského grafu je eulerovský.

Hamiltonovská krychle

Bud' $d \in \mathbb{N}$ a $V = \{0,1\}^d$, tedy V je množina 0/1 vektorů délky d . Grafu na V , ve kterém spolu dva vektory sousedí právě tehdy, když se liší v právě jedné souřadnici, se říká *d -dimenzionální krychle*. Dokažte, že pro $d \geq 2$ je d -dimenzionální krychle hamiltonovská, tedy že existuje kružnice, která prochází všemi vrcholy.